

684

Université de Paris

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

THESES

présentées pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Nicole MOULIS

1ère Thèse : Approximation de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach.
Sur les variétés hilbertiennes et les fonctions non-dégénérées

2ème Thèse : Propositions données par la faculté

Soutenues le 30 juin 1970 devant la commission d'examen

Messieurs Cartan

Président

Kuiper

Cerf

Dixmier

Université de Paris

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

THESES

présentées pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Nicole MOULIS

1ère Thèse : Approximation de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach.
Sur les variétés hilbertiennes et les fonctions non-dégénérées

2ème Thèse : Propositions données par la faculté

Soutenues le 30 juin 1970 devant la commission d'examen

Messieurs Cartan	Président
Kuiper	
Cerf	
Dixmier	

Universiteit van Leiden

Wetenschappelijke Bibliotheek

THESES

Wetenschappelijke Bibliotheek

Wetenschappelijke Bibliotheek



Wetenschappelijke Bibliotheek

Wetenschappelijke Bibliotheek

Wetenschappelijke Bibliotheek

Wetenschappelijke Bibliotheek

Wetenschappelijke Bibliotheek

Wetenschappelijke Bibliotheek

Wetenschappelijke Bibliotheek

Approximation de fonctions différentiables
sur certains espaces de Banach.

§0. Introduction.

E étant un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, Ω un ouvert de E le sujet de cette étude est l'approximation de fonctions de classe C^k définies sur Ω à valeurs dans un espace de Banach F , par des fonctions de classe C^∞ .

Dans un article paru au "Journal of Mechanics" "An approximate Morse-Sard Theorem" [6]. J. Eells et J. Mac Alpin montrent que si X et Y sont deux variétés paracompactes de classe C^∞ modelées sur E , toute application continue de X dans Y peut-être approchée au sens de la C^0 -topologie fine par une application de classe C^∞ qui est une application de Sard (l'ensemble des valeurs critiques est maigre). Ce résultat a pour corollaire : soit B une sous-variété fermée de Y , toute application continue de X dans Y peut-être approchée au sens de la C^0 -topologie fine par une application de classe C^∞ transversale à B . Les seuls autres théorèmes de transversalités connus pour les variétés de dimension infinie sont dûs à S. Smale [13] et F. Quinn [12] et concernent les applications Fredholm.

Ces résultats sont généralisés de la manière suivante :

Dans le paragraphe I, nous démontrons que l'ensemble des applications de classe C^∞ de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^{2k-1} muni de la C^k -topologie fine. Si E est de dimension finie, un théorème plus fort est vrai et bien connu ; mais sa démonstration utilise le produit de convolution, donc une mesure de Lebesgue sur E .

f étant une fonction donnée de classe C^{2k-1} définie sur Ω , nous construisons explicitement une fonction $\bar{g}$ de classe C^∞ qui est une C^k -approximation de f . La construction se fait en deux étapes : à l'aide du



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551512_0020

théorème connu en dimension finie, et en utilisant l'existence d'une suite de sous-espaces de dimension finie de E dont la réunion est dense dans E , nous définissons une fonction g de classe C^∞ qui est une C^{k-1} -approximation de f et telle que $D^k g$ "ne diffère pas trop" de $D^k f$. Puis, ce lemme est utilisé localement pour, grâce à certaines partitions de l'unité construire la fonction g .

Pour clarifier l'exposé, nous avons d'abord fait la démonstration pour $k=1$. Elle se généralise, alors, au cas où Ω est un ouvert de C_0 ou d'un espace ℓ_p : si α est la classe d'une norme sur l'espace [2], nous démontrons que l'ensemble des applications de classe C^α de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 de Ω dans F , muni de la C^1 -topologie fine.

Dans le paragraphe II, nous donnons quelques applications des théorèmes du paragraphe I qui permettent de ramener l'étude des variétés hilbertiennes de classe C^k à celle des variétés de classe C^∞ (les seules pour lesquelles des théorèmes soient connus d'après [9] et [5]). Ces théorèmes sont démontrés par des méthodes "classiques" [11].

Dans la paragraphe III, nous approfondissons l'étude des fonctions construites au paragraphe I. Dans le cas d'une C^1 -approximation, la fonction $\bar{g}$ s'obtient par recollement de fonctions très voisines de fonctions linéaires (qui sont des fonctions de Sard). L'étude précise de $D\bar{g}$ montre que, dans le cas où Ω est un ouvert d'un espace de Hilbert, l'ensemble des applications de Sard, de classe C^∞ de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 , muni de la C^1 -topologie fine.

Nous en déduisons que si M et N sont deux variétés de classe C^∞ modelées sur E , N_1 une sous-variété de N l'ensemble des applications de classe C^∞ de M dans N transversales à N_1 est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 muni de la C^1 -topologie fine.

Pour terminer cet exposé préliminaire, je voudrais adresser mes plus vifs remerciements et exprimer toute ma reconnaissance à mon maître Professeur Nicolaas. Kuiper auprès de qui j'ai trouvé pendant mes deux années passées en Hollande un

accueil compréhensif et chaleureux. Il n'a cessé de me guider par ses conseils et de me soutenir par ses encouragements.

Je dois également remercier Monsieur Cerf et Monsieur Cartan qui m'ont initiée à la Topologie Différentielle, mes maîtres qui, au cours de mes études m'ont fait découvrir les Mathématiques : Madame Savignat, Monsieur Klein, Monsieur Chazal, et Monsieur Dixmier qui a accepté de faire partie du jury.

Je remercie enfin Mesdemoiselles Boulanger et Baudon qui ont accompli la tâche de dactylographier ce mémoire.

Nicole Moulis

Faculté d'Orsay - Avril 1970.

§I. Lissage de fonctions définies sur certains espaces de Banach.

Dans tout ce paragraphe, E^α désignera un des espaces de Banach suivant :

ℓ_p : espace des suites de nombres réels $\{x_n\}$ tels que la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p$ soit convergente ; p entier supérieur ou égal à 2.

c_0 : espace des suites de nombres réels $\{x_n\}$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Nous supposerons E^α muni d'une norme de classe C^α sur le complémentaire de l'origine dans E^α .

D'après [2] les espaces c_0 et ℓ_{2p} admettent une norme de classe C^∞ équivalente à la norme usuelle. Les espaces ℓ_{2p+1} admettent une norme de classe C^{2p} .

A) Théorème 1. Soit Ω un ouvert de E^α , F un espace de Banach. L'ensemble des applications de classe C^α de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 de Ω dans F muni de la C^1 -topologie fine. (Cet ensemble est noté $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$).

Pour démontrer le théorème 1 nous démontrons tout d'abord un lemme fondamental qui sera utilisé comme lemme local dans la suite.

A₁) Lemme fondamental 1. Soit f une application de classe C^1 définie sur une boule B_1 centrée à l'origine de E^α à valeurs dans F . Soit B_0 une boule centrée à l'origine de E $B_0 \subset B_1$ et $\bar{\eta}$ un nombre positif tel que :

$$\sup_{x \in B_0} |D^1 f(x)| < \bar{\eta}.$$

Soit ε un nombre positif arbitraire. Il existe 2 constantes λ_0 et λ_1 indépendantes de ε et de η et une fonction g de classe C^α définie sur B_1 à valeurs dans F telles que :

$$\sup_{x \in B_0} |f(x) - g(x)| < \lambda_0 \varepsilon$$

$$\sup_{x \in B_0} |D^1 g(x)| < \lambda_1 \bar{\eta}$$

Démonstration du lemme fondamental. Soit (e_n) ($n \in \mathbb{N}$) la base canonique de E^α (e_n est la suite $\{x_p^n\}$ telle que $x_p^n = 0$ si $p \neq n$ $x_n^n = 1$). Soit E_n , l'espace engendré par les e_p ($1 \leq p \leq n$). Soit π_n la projection sur E_n parallèlement à l'espace E^n engendré par les e_p ($p > n$).

Posons $E^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

E^∞ est un sous-espace vectoriel de E .

Nous munissons E^∞ de la norme induite par celle de E . Cette norme induit sur chaque E_n une norme équivalente à la norme euclidienne notée $|\cdot|_n$.

E^∞ est un sous-espace vectoriel normé dense dans E , non complet.

La construction de la fonction g se fait en deux parties.

1°) Nous construisons une fonction $\bar{f}$ sur E^∞ telle que la restriction de $\bar{f}$ à E_n soit de classe C^∞ (quel que soit n) et telle que $\bar{f}$ soit "proche de f ".

2°) Nous construisons une application différentiable Ψ de E sur E^∞ telle que $|x - \Psi(x)| < r$. La fonction g est ainsi définie

$$g(x) = \bar{f}(\Psi(x)).$$

1°) Construction de $\bar{f}$.

Soit φ une fonction de classe C^∞ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{si} \quad |t| < \frac{1}{2}$$

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{si} \quad |t| > 1$$

φ est décroissante.

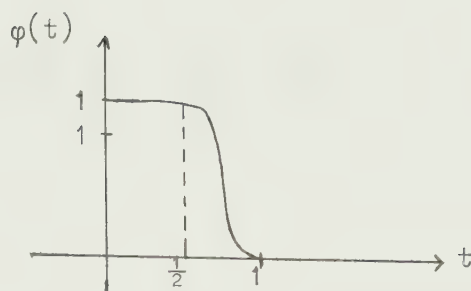


Figure 1

Considérons la fonction $\hat{f}_n$ (définie sur E) par

$$\hat{f}_n(x) = \frac{a_n}{c} \int_{E_n} f(x-y) \varphi(a_n |y|_n) dy$$

où $c = \int_{E_n} \varphi(|y|_n) dy$

et a_n est une constante telle que :

$$\sup_{x \in E_n \cap B_0} |\hat{f}_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\sup_{x \in E_n \cap B_0} |D\hat{f}_n(x) - Df(x)| < \frac{\bar{\eta}}{2^n}.$$

La fonction $\hat{f}_n$ est de classe C^1 , mais la restriction à E_n de $\hat{f}_n$ est de classe C^∞ .

Posons $\bar{f}_0 = f(e_0)$.

Supposons définie par récurrence sur E_{n-1} la fonction $\bar{f}_{n-1}$.

Posons : $\bar{f}_n(x) = \hat{f}_n(x) + \bar{f}_{n-1}(\pi_{n-1}(x)) - \hat{f}_n(\pi_{n-1}(x))$.

Par récurrence on vérifie que :

(i) La restriction à E_n de $\bar{f}_n$ est de classe C^∞

$\bar{f}_n$ coïncide avec $\bar{f}_{n-1}$ sur E_{n-1} .

$$(ii) \quad \sup_{x \in E_n \cap B_0} |\bar{f}_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon(1 - \frac{1}{2^n}).$$

$$(ii) \quad \sup_{x \in E_n \cap B_0} |D\bar{f}_n(x) - Df(x)| < 2\bar{\eta}(1 - \frac{1}{2^n}).$$

Nous pouvons donc poser :

$$\bar{f} = \lim_{\longrightarrow} \bar{f}_n \quad \text{et} \quad \bar{f} \quad \text{vérifie les propriétés suivantes}$$

(i) La restriction de $\bar{f}$ à tout sous-espace E_n est de classe C^∞

(ii) $\sup_{x \in B_0 \cap E^\infty} |\bar{f}(x) - f(x)| < 2\varepsilon$

(iii) $\sup_{x \in B_0 \cap E^\infty} |D\bar{f}(x) - Df(x)| < 2\bar{\eta}$.

2°) Construction de l'application Ψ .

Cette construction varie suivant la nature de l'espace E^α considéré

a) E^α est un espace ℓ_p .

Soit x un point de E : $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$.

Posons $X_n(x) = 1 - \varphi \left[\frac{\left[\sum_{i \geq n} |x_i|^p \right]^{1/p}}{r} \right]$ (φ est la fonction dont le graphe est représenté sur la figure 1).

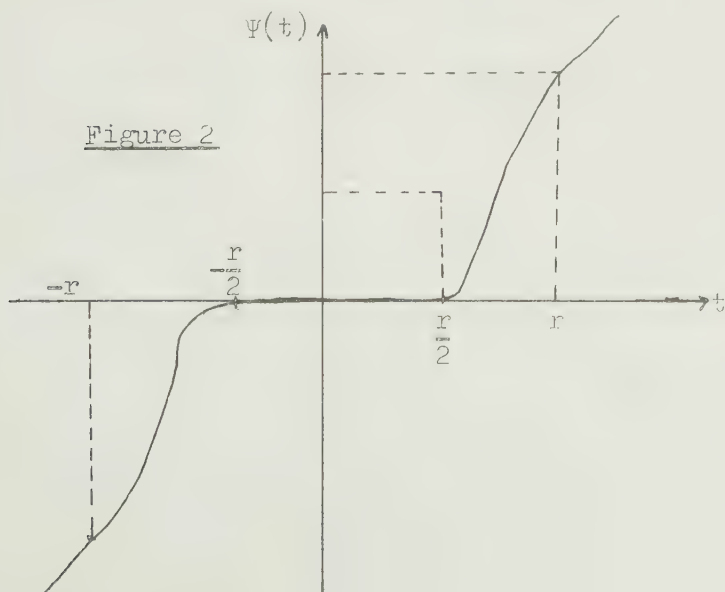
$$X_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad \left(\sum_{i \geq n} |x_i|^p \right)^{1/p} \leq r \times 2^{-\frac{1}{p}}$$

$$X_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad \left(\sum_{i \geq n} |x_i|^p \right)^{1/p} \geq r.$$

Posons $\phi_n(x) = X_n(x)x_n$ $\Psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(x)e_n$.

b) E^α est l'espace c_0 .

Considérons la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est représenté sur la figure 2 :



ψ est de classe C^∞

ψ est croissante au sens large

$$\psi(-t) = -\psi(t)$$

$$\text{si } |t| < \frac{1}{2} \quad \psi(t) = 0$$

$$\text{si } |t| > r \quad \psi(t) = t$$

$$|\psi'(t)| < 4$$

Posons $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n))$.

Dans les deux cas a) et b) l'application Ψ a les propriétés suivantes :

(i) Ψ est une application de E sur E^∞ .

En outre quel que soit x dans E , il existe un entier $n(x)$ et un voisinage

U_x de x dans E tel que :

$$\Psi(U_x) \subset E_{n(x)}.$$

(ii) L'application Ψ de E^α dans E^∞ est de classe C^α .

Au voisinage de x , l'application Ψ est une application de U_x dans $E_{n(x)}$

dont chacune des composantes (considérée comme application de U_x dans $\mathbb{R}$ est de classe C^α), Ψ est de classe C^α .

(iii) Il existe une constante C_1 telle que $|D\Psi(x)| < C_1$.

Démonstration dans le cas a) d'un espace ℓ_p .

$$D\Psi_n(x) = D X_n(x) x_n + X_n(x) e_n^*$$

(e_n^* est le vecteur dual de e_n : $e_n^* \cdot h = h_n$, h_n composante de h suivant e_n).

Posons $X_n^1(x) = 1 - \varphi \left[\sum_{i \geq n} |x_i|^p \right]$.

$$D X_n^1(x) = -p \sum_{i \geq n} (\sigma_i)^p x_i^{p-1} e_i^* \varphi' \left[\sum_{i \geq n} |x_i|^p \right]$$

où σ_i = signe de x_i . Désignons par $|\cdot|^*$ la norme dans le dual de ℓ_p : ℓ_q

($q = \frac{p}{p-1}$)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \geq n} (\sigma_i)^p x_i^{p-1} \right|^* &= \left(\sum_{i \geq n} |x_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{i \geq n} |x_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

En tout point où $|x| \geq 1$ $D X_n^1(x) = 0$

$$|D X_n^1(x)| \leq p \sup_t |\varphi'(t)|,$$

$$\text{Or } X_n(x) = X_n^1\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$D X_n(x) = \frac{1}{r} D X_n^1\left(\frac{x}{r}\right).$$

Il existe une constante M_1 , indépendante de r telle que : $|D X_n(x)| \leq \frac{M_1}{r}$.

$$D \Psi(x).h = \sum_{n \in \mathbb{N}} D X_n(x).h x_n e_n + \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(x) h_n e_n$$

$$|D \Psi(x).h| \leq \frac{M_1 |h|}{r} \left| \sum_{n \geq n_0} x_n e_n \right| + |h|$$

où n_0 est le plus petit entier tel que $\left(\sum_{n \geq n_0} |x_n|^p \right)^{1/p} \leq r$.

$$|D \Psi(x).h| \leq (M_1 + 1) |h|.$$

Il suffit de poser $C_1 = M_1 + 1$.

Démonstration dans le cas b) de l'espace c_0 .

Soit $h = (h_1, \dots, h_n, \dots)$ un élément de c_0 .

$$D^1 \Psi(x).h = (\psi'(x_1)h_1, \psi'(x_2)h_2, \dots, \psi'(x_n)h_n, \dots)$$

$$|D^1 \Psi(x)| \leq \sup_{i \geq 1} |\psi'(x_i)|$$

$$|D^1 \Psi(x)| < 4 \quad C_1 = 4.$$

$$(iv) \quad |x - \Psi(x)| \leq r.$$

a) Cas où E est un espace ℓ_p :

$$x - \Psi(x) = \sum_{n \geq n_0} x_n (1 - X_n(x)) e_n$$

$$\begin{aligned} |x - \Psi(x)| &\leq \left| \sum_{n \geq n_0} x_n e_n \right| \\ &\leq r \end{aligned}$$

b) Cas où E est l'espace c_0 :

$$|x - \Psi(x)| \leq \sup |x_n - \phi(x_n)|$$

$$\leq r \quad \text{par définition de } \phi.$$

3°) Définition et propriétés de g .

Posons $g(x) = \bar{f}(\Psi(x))$.

(i) g est de classe C^∞

car g est composée d'applications de classe C^∞ .

(ii) Il existe une constante λ_0 telle que :

$$\sup_{x \in B_0} |f(x) - g(x)| < \lambda_0 \varepsilon$$

$$f(x) = f(\Psi(x)) + \int_0^1 Df(\Psi(x) + t(x - \Psi(x))) \cdot (x - \Psi(x)) dt$$

$$f(x) - g(x) = f(\Psi(x)) - \bar{f}(\Psi(x)) + \int_0^1 Df(\Psi(x) + t(x - \Psi(x))) \cdot (x - \Psi(x)) dt.$$

$$\text{Or } \sup_{x \in B_0} |Df(x)| < \bar{\eta} \text{ et } |x - \Psi(x)| < r.$$

$$|f(x) - g(x)| < 3\varepsilon + \bar{\eta}r < 4\varepsilon.$$

(iii) Il existe une constante λ_1 telle que :

$$\sup_{x \in B_0} |Dg(x)| < \lambda_1 \bar{\eta}$$

$$Dg(x) = D\bar{f}(\Psi(x)) \times D\Psi(x)$$

$$|Dg(x)| \leq 3\bar{\eta} \times C_1.$$

Le lemme fondamental 1 est démontré.

A₂) Fin de la démonstration du théorème 1. Soit $\varepsilon(x)$ une fonction continue définie sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{R}$, strictement positive. f étant une fonction de classe C^1 définie sur Ω , à valeurs dans F , nous allons montrer qu'il existe dans $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ une ε -approximation de f , $\bar{g}$ de classe C^α c'est-à-dire une fonction g telle que, quel que soit x :

$$|f(x) - \bar{g}(x)| < \varepsilon(x)$$

$$|Df(x) - D\bar{g}(x)| < \varepsilon(x).$$

Dans toute la suite la norme considérée sur E^α sera supposée de classe C^α (dans le cas de l'espace C_0 cette norme n'est pas celle considérée d'ordinaire, mais celle définie dans [2]).

Définition d'un recouvrement dénombrable de Ω .

Lemme 2. Quel que soit x point de Ω , il existe une boule $B'(x)$ de centre x et de rayon $\rho'(x)$ contenue dans Ω telle que :

$$a) \sup_{(y, y') \in B'(x)} |\varepsilon(y) - \varepsilon(y')| < \inf_{z \in B'(x)} \frac{\varepsilon(z)}{2}$$

$$b) \sup_{(y, y') \in B'(x)} |Df(y) - Df(y')| < \inf_{z \in B'(x)} \varepsilon(z)$$

$$c) \text{ si } B'(x) \cap B'(y) \neq \emptyset \quad \frac{1}{4} < \frac{\rho'(x)}{\rho'(y)} < 4$$

$$d) \sup_{x \in \Omega} \rho'(x) < 2.$$

Démonstration du lemme 2. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}(x)$ des nombres positifs

$\bar{\rho}(x)$ tels que la boule $\bar{B}(x)$ de centre x et de rayon $\bar{\rho}(x)$ soit contenu dans Ω et que dans cette boule les propriétés a) et b) du lemme 2 soient vérifiées.

$\mathcal{E}(x)$ n'est pas vide. Soit $\rho_0(x)$ la borne supérieure de $\mathcal{E}(x)$. Pour chaque x , choisissons un nombre positif $\tilde{\rho}(x)$ vérifiant :

$$0 < \frac{1}{2} \rho_0(x) < \tilde{\rho}(x) < \rho_0(x).$$

Posons $\hat{\rho}(x) = \frac{\tilde{\rho}(x)}{4}$

$$\rho'(x) = \inf (\hat{\rho}(x), 2).$$

Sur la boule $B'(x)$ de centre x et de rayon $\rho'(x)$ les propriétés a), b), d) sont trivialement vérifiées.

Vérification de la propriété c)

$$\text{Supposons } \begin{cases} B'(x) \cap B'(y) \neq \emptyset \\ \rho'(x) \geq \rho'(y). \end{cases}$$

Deux cas peuvent se produire

$$1^{\circ}) \quad \rho'(x) = \rho'(y) = 2 \quad \frac{\rho'(x)}{\rho'(y)} = 1 .$$

La propriété est alors vérifiée.

$$2^{\circ}) \quad 2 \gg \rho'(x) > \rho'(y) .$$

$$\text{Dans ce cas} \quad \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\rho}(y)} \gg \frac{\rho'(x)}{\rho'(y)} .$$

$$\text{Majorons} \quad \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\rho}(y)} .$$

$$|x-y| < \rho'(x) + \rho'(y) < 2\rho'(x) < \frac{\tilde{\rho}(x)}{2} .$$

La boule $B(y, \frac{\tilde{\rho}(x)}{2})$ de centre y et de rayon $\frac{\tilde{\rho}(x)}{2}$ est contenue dans la boule

$B(x, \tilde{\rho}(x))$ de centre x et de rayon $\tilde{\rho}(x)$.

$$\text{Donc} \quad \frac{\tilde{\rho}(x)}{2} \in \mathcal{C}(y) .$$

$$\frac{\tilde{\rho}(x)}{2} < \rho_0(y) < 2\tilde{\rho}(y)$$

$$\tilde{\rho}(x) < 4\tilde{\rho}(y) \quad \rho'(x) < 4\rho'(y) .$$

Dans les deux cas possibles $\rho'(x) < 4\rho'(y)$ ce qui achève la démonstration du lemme.

$$\text{Posons} \quad \rho(x) = \frac{\rho'(x)}{2} .$$

$$\bigcup_{x \in \Omega} B(x, \rho(x)) = \Omega .$$

De ce recouvrement, nous pouvons extraire un recouvrement dénombrable par des

boules B_n de centre a_n et de rayon ρ_n ($n \in \mathbb{N}$). Nous désignerons par B'_n

la boule de centre a_n et de rayon $\rho'_n = 2\rho_n$.

$$\text{Posons} \quad \varepsilon_n = \varepsilon(a_n) .$$

Construction d'une fonction $\bar{g}$ de classe C^α , "proche de f ".

Considérons les fonctions φ_n définies sur E^α par :

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{|x-a_n|}{\rho_n}\right)$$

φ_n est de classe C^α égale à 1 sur B_n , 0 en dehors de B'_n .

Considérons les fonctions linéaires ℓ_n :

$$\ell_n(x) = f(a_n) + Df(a_n) \cdot (x - a_n)$$

$$\sup_{x \in B'_n} |D\ell_n(x) - Df(x)| < \varepsilon_n.$$

A la fonction $(f - \ell_n)$ nous pouvons appliquer sur B'_n le lemme fondamental 1.

Il existe pour chaque n une fonction δ_n de classe C^α telle que :

$$\sup_{x \in B'_n} |f(x) - \ell_n(x) - \delta_n(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n$$

$$\sup_{x \in B'_n} |Df(x) - D\ell_n(x) - D\delta_n(x)| < \lambda \varepsilon_n$$

(λ est une constante indépendante de n).

Posons $\tilde{f}_n(x) = \delta_n(x) + \ell_n(x)$.

$\tilde{f}_n(x)$ est une fonction de classe C^α telle que :

$$(i) \quad \sup_{x \in B'_n} |\tilde{f}_n(x) - f(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n$$

$$(ii) \quad \sup_{x \in B'_n} |D\tilde{f}_n(x) - Df(x)| < \lambda \varepsilon_n.$$

Nous définissons une suite de fonctions g_n par :

$$\begin{aligned} g_n = f + \varphi_1(\tilde{f}_1 - f) + \varphi_2(1 - \varphi_1)(\tilde{f}_2 - f) + \dots \\ + \varphi_n(1 - \varphi_{n-1}) \dots (1 - \varphi_1)(\tilde{f}_n - f). \end{aligned}$$

Propriétés de la suite $\{g_n\}$.

[P₁] La suite $\{g_n\}$ se stabilise.

Soit $1 \leq p \leq n$.

$$\begin{aligned} \forall x \in B_p \quad g_n(x) &= g_p(x) = f(x) + \varphi_1(x)(\tilde{f}_1(x) - f(x)) + \dots \\ &+ (1 - \varphi_{p-1}(x))(1 - \varphi_{p-2}(x)) \dots (1 - \varphi_1(x))(\tilde{f}_p(x) - f(x)). \end{aligned}$$

Les boules B_n ($n \in \mathbb{N}$) recouvrent tout l'espace. En tout point x , à partir d'un certain rang, la suite $\{g_n(x)\}$ est constante.

[P₂] Sur B_n , g_n est de classe C^α .

Posons, par récurrence sur l'entier p ($2 \leq p \leq n$), la récurrence se faisant suivant les valeurs décroissantes de p :

$$\begin{cases} h_{p-1}^n = \varphi_p(\tilde{f}_p - f) + (1 - \varphi_p)h_p^n \\ h_n^n = 0. \end{cases}$$

Par récurrence, on démontre que la fonction g_n s'exprime de la manière suivante

$$\begin{aligned} g_n &= f + \varphi_1(\tilde{f}_1 - f) + \dots + \varphi_{p-1}(1 - \varphi_{p-2}) \dots (1 - \varphi_1)(\tilde{f}_{p-1} - f) \\ &+ (1 - \varphi_{p-1})(1 - \varphi_{p-2}) \dots (1 - \varphi_1)h_{p-1}^n. \\ h_{n-1}^n &= \varphi_n(\tilde{f}_n - f) \quad g_n = h_1^n + f. \end{aligned}$$

Sur B_n $h_{n-1}^n + f$ est de classe C^α .

Par récurrence sur B_n $g_n = h_1^n + f$ est de classe C^α .

[P₃] Il existe une constante λ'_0 .

(λ'_0 indépendante de n) telle que :

$$\sup_{x \in B_n} |g_n(x) - f(x)| < \lambda'_0 \varepsilon_n.$$

Supposons, par induction sur p démontré que :

$$\sup_{x \in B_n} |h_p^n(x)| < \frac{2\varepsilon_n}{2^{p+1}} \times 4\rho_n$$

$$h_{p-1}^n = \varphi_p(\tilde{f}_p - f) + (1 - \varphi_p)h_p^n$$

- si $B'_p \cap B_n = \emptyset$

$$\forall x \in B_n \quad \varphi_p(x) = 0 \quad h_{p-1}^n(x) = h_p^n(x)$$

- si $B'_p \cap B_n \neq \emptyset \quad \varepsilon_p < 2\varepsilon_n \quad \rho_p < 4\rho_n$

$$\sup_{x \in B'_p \cap B_n} |\tilde{f}_p(x) - f(x)| < 2\varepsilon_n \times 2^{-p} \times 4\rho_n.$$

Par récurrence sur p sachant que $h_1^n = g_n$

$$\sup_{x \in B_n} |g_n(x) - f(x)| < 2^{-p+3} \varepsilon_n \rho_n$$

comme $\rho_n < 1$, $[P_3]$ est démontrée.

$[P_4]$ Il existe une constante λ'_1 indépendante de n telle que :

$$\sup_{x \in B_n} |Dg_n(x) - Df(x)| < \lambda'_1 \varepsilon_n.$$

Posons par récurrence sur p , pour les valeurs décroissantes de p :

$$\begin{cases} h_{p-1}^n = \varphi_p(D\tilde{f}_p - Df) + (1 - \varphi_p)h_p^n \\ h_n^n = 0 \end{cases}$$

$$Dg_n - Df = h_1^n + \sum_{p=1}^n (1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_{p-1}) D\varphi_p[(\tilde{f}_p - f) - h_p^n].$$

D'après la propriété (ii) de $\tilde{f}_n$ le même raisonnement que précédemment montre

qu'il existe une constante k' telle que

$$\sup_{x \in B_n} |h_1^n(x)| < 2k' \varepsilon_n$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_n} |h_p^n(x)| &< 2^{-p} \varepsilon_p \times 4\rho_p \\ \sup_{x \in B_n \cap B'_p} |\tilde{f}_p(x) - f(x) - h_p^n(x)| &< 2^{-p} [\varepsilon_p \rho_p + \varepsilon_p \times 4\rho_p]. \end{aligned}$$

La différentielle de la fonction norme ayant, dans l'espace dual une norme majorée par une constante C ; d'après la définition de φ_p

$$|D\varphi_p|^* < \frac{4C}{\rho_p}$$

$$\sup_{x \in B_n \cap B_p} |(1-\varphi_1) \dots (1-\varphi_{p-1}) D\varphi_p(\tilde{f}_p - f - h_p^n)| < 2^{-p} \times 20C \varepsilon_p .$$

En sommant sur l'indice p et en remarquant que, si un point de x n'appartient pas à B'_p , en ce point $D\varphi_p(x) = 0$ et le terme correspondant de la série est nul, nous obtenons :

$$\left\| \sum_{p=1}^n (1-\varphi_1) \dots (1-\varphi_{p-1}) D\varphi_p(\tilde{f}_p - f - h_p^n) \right\| < 40C \varepsilon_n .$$

La propriété $[P_4]$ est donc démontrée.

$$\text{Posons } \bar{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n .$$

Pour tout élément x de Ω , posons :

$$n(x) = \inf \{n ; x \in B_n\} .$$

Il existe un voisinage de x , $V(x)$ tel que $V(x) \subset B_{n(x)}$ sur $V(x)$,

$$\bar{g}(x) = g_{n(x)}(x) .$$

Des propriétés P_2, P_3, P_4 , nous déduisons respectivement les propriétés P'_2, P'_3, P'_4

$[P'_2]$ $\bar{g}$ est de classe C^α

$$[P'_3] \sup_{x \in \Omega} |\bar{g}(x) - f(x)| \leq \bar{\lambda}_0 \varepsilon(x)$$

$$[P'_4] \sup_{x \in \Omega} |D\bar{g}(x) - Df(x)| < \bar{\lambda}_1 \varepsilon(x)$$

où λ_0 et λ_1 sont deux constantes.

La fonction ε pouvant être choisie arbitrairement proche de 0, le théorème 1 est démontré.

B) Théorème 2. Dans toute cette partie B), E désignera un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Soit Ω un ouvert d'un espace de Hilbert séparable E de dimension infinie et F un espace de Banach. L'ensemble des applications de classe C^∞ de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^{2k-1} muni de la C^k -topologie fine (cet ensemble est noté $C_{2k-1}^k(\Omega, F)$).

Remarque. D'après [14] sur l'espace C_0 il est impossible d'approcher au sens de la C^2 -topologie fine toute fonction de classe C^2 par une fonction de classe C^∞ .

B₁) Lemme fondamental 2. Soit f une application de classe C^{2k-1} de E dans F . Soit B_0 une boule centrée à l'origine de E et $\bar{\eta}$ un nombre positif tel que :

$$\sup_{x \in B_0} |D^{2k-1}f(x)| < \bar{\eta}.$$

Soit ε un nombre positif arbitraire. Posons $r = \frac{\varepsilon}{\bar{\eta}}$. Il existe $(k+1)$ constantes λ_i ($0 \leq i \leq k$) indépendantes de ε et de η et une fonction g de classe C^∞ définie sur E et à valeurs dans F telle que :

$$\begin{aligned} 0 \leq i \leq k-1 \quad & \sup_{x \in B_0} |D^i f(x) - D^i g(x)| < \lambda_i \varepsilon r^{k-1-i} \\ & \sup_{x \in B_0} |D^k g(x)| < \lambda_k \bar{\eta}. \end{aligned}$$

La construction est une généralisation de celle faite pour démontrer le lemme fondamental 1.

Nous construisons une fonction $\bar{f}$ sur E^∞ telle que la restriction de $\bar{f}$ à E_n soit de classe C^∞ et telle que $\bar{f}$ soit "proche" de f .

Par le même procédé, nous construisons des applications L^i de E^∞ dans $\mathcal{L}_s^i(E, F)$ (espace des applications i -multilinéaires symétriques de E dans F). Les applications L^i sont de classe C^∞ et "proches" de $D^i f$ pour $1 \leq i \leq k-1$.

La fonction Ψ étant celle définie précédemment la fonction g est ainsi définie :

$$g(x) = \bar{f}(\Psi(x)) + \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{1}{i!} L^i(\Psi(x)) \cdot (x - \Psi(x))^i.$$

1°) Construction de $\bar{f}$ et de L^i ($1 \leq i \leq k-1$).

Dans tout ce qui suit, nous conviendrons d'identifier la différentielle d'ordre 0 d'une fonction avec la fonction elle-même. φ étant la fonction dont le graphe est représenté sur la figure 1, posons :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{b_n}{c} \int_{E_n} f(x-y) \varphi\left(\frac{|y|}{b_n}\right) dy$$

où $c = \int_{E_n} \varphi(|y|) dy$

et b_n est une constante telle que :

$$\forall i \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad \sup_{x \in E_n \cap B_0} |D^i \hat{f}_n(x) - D^i f(x)| < \varepsilon \frac{r^{k-1-i}}{2^n}$$

$$2k-1 \geq j \geq k \quad \sup_{x \in E_n \cap B_0} |D^j \hat{f}_n(x) - D^j f(x)| < \frac{\bar{\eta}}{2^n}.$$

L'existence de la constante b_n est une conséquence des propriétés du produit de convolution : nous avons :

$$1 \leq i \leq k \quad D^i \hat{f}_n(x) = \frac{b_n}{c} \int_{E_n} D^i f(x-y) \varphi\left(\frac{|y|}{b_n}\right) dy.$$

La fonction $\hat{f}_n$ est de classe C^{2k-1} , mais la restriction à E_n de $\hat{f}_n$ et de $D^i \hat{f}_n$ ($1 \leq i \leq k$) est de classe C^∞ .

Posons $\bar{f}_0 = f(e_0)$ (e_0 origine de E)

$$L_0^i = D^i f(e_0)$$

Supposons définies sur E_{n-1} les fonctions $\bar{f}_{n-1}$ et L_{n-1}^i .

Posons $\bar{f}_n(x) = \hat{f}_n(x) + \bar{f}_{n-1}(\pi_{n-1}(x)) - \hat{f}_n(\pi_{n-1}(x))$

$$L_n^i(x) = D^i \hat{f}_n(x) + L_{n-1}^i(\pi_{n-1}(x)) - D^i \hat{f}_n(\pi_{n-1}(x)).$$

Lemme 1. Les fonctions $\bar{f}_n$ et L_n^i vérifient les propriétés suivantes :

- (i) $\sup_{x \in E_n} |\bar{f}_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) r^{k-1}$
- (ii) $1 \leq i \leq k-1 \quad \sup_{x \in E_n} |L_n^i(x) - D^i f(x)| < 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) r^{k-1-i}$
- (iii) $\sup_{x \in E_n} |L_n^k(x) - D^k f(x)| < 2\bar{\eta} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$
- (iv) la restriction à E_n de L_n^i et de $\bar{f}_n$ est de classe C^∞
- (v) $\bar{f}_n$ coïncide avec f_{n-1} sur E_{n-1} , L_n^i coïncide avec L_{n-1}^i sur E_{n-1} .

Démontrons ces propriétés par récurrence. Elles sont vraies à l'ordre 0 puisque

$$E_0 = \{e_0\}.$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_n(x) - f(x) &= \hat{f}_n(x) - f(x) + \bar{f}_{n-1}(\pi_{n-1}(x)) - f(\pi_{n-1}(x)) \\ &\quad - (\hat{f}_n(\pi_{n-1}(x)) - f(\pi_{n-1}(x))) \\ &\leq \varepsilon r^{k-1} \left(\frac{1}{2^n} + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} \right) \\ &\leq \varepsilon r^{k-1} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Les propriétés (ii) et (iii) se vérifient de même que (i). La restriction à E_n de $\hat{f}_n$ et $D^i \hat{f}_n$ étant de classe C^∞ , il en est de même pour $\bar{f}_n$ et L_n^i .

La propriété (v) est triviale et nous pouvons poser

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \varinjlim \bar{f}_n \\ L^i &= \varinjlim L_n^i \end{aligned}$$

Les fonctions $\bar{f}$ et L^i vérifient les propriétés suivantes

$$(i) \quad |\bar{f}(x) - f(x)| < 2\varepsilon r^{k-1}$$

$$(ii) \quad 1 \leq i \leq k-1 \quad |L^i(x) - D^i f(x)| < 2\varepsilon r^{k-1-i}$$

$$(iii) \quad |L^k(x) - D^k f(x)| < 2\bar{\eta}$$

(iv) La restriction à tout sous espace E_n de $\bar{f}$ et de L^i est de classe C^∞ .

2°) Construction de l'application Ψ .

Soit x un point de E $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$.

$$\text{Posons } X_n(x) = 1 - \varphi \left[\frac{\left(\sum_{p \geq n} x_p^2 \right)^k}{r^{2k}} \right]$$

$$X_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad \left(\sum_{p \geq n} x_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq r \times 2^{-\frac{1}{2k}}$$

$$X_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad \left(\sum_{p \geq n} x_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq r.$$

$$\text{Posons } \psi_n(x) = X_n(x) x_n$$

$$\Psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(x) e_n$$

De même que dans la partie A_1 (cas d'un espace ℓ_p) l'application Ψ vérifie les propriétés suivantes : a) b) c) les démonstrations étant les mêmes.

a) L'application Ψ est une application de E dans E^∞ .

b) L'application Ψ est de classe C^∞ .

Quel que soit x il existe un entier $n(x)$ et un voisinage U_x de x dans E tels que $\Psi(U_x) \subset E_{n(x)}$.

c) Il existe une constante C_1 telle que $|D^1 \Psi(x)| < C_1$.

d) Il existe des constantes C_i telles que $|D^i \Psi(x)| < C_i r^{1-i}$.

Démonstration de d).

$$D^i \psi_n(x) = D^i X_n(x) x_n + D^{i-1} X_n(x) \times (\text{id.} e_n).$$

Plus explicitement :

$$D^i \psi_n(x) \cdot (h^1, \dots, h^i) = D^i X_n(x) \cdot (h^1, \dots, h^i) x_n + \sum_{1 \leq j \leq i} D^{i-1} X_n(x) \cdot (h^1, \dots, \hat{h}^j, \dots, h^i) (h^j \cdot e_n) e_n$$

$$D^i \Psi(x) \cdot (h^1, \dots, h^i) = \sum_{n \geq n_0} D^i X_n(x) \cdot (h^1, \dots, h^i) x_n e_n + \sum_{1 \leq j \leq i} \sum_{n \geq n_0} D^{i-1} X_n(x) \cdot (h^1, \dots, \hat{h}^j, \dots, h^i) (h^j \cdot e_n) e_n$$

(n_0 est le plus petit entier tel que

$$\sum_{n \geq n_0} x_n^2 \leq r^2$$

$$|D^i \Psi(x) \cdot (h^1, \dots, h^i)| < \sup_{n \geq n_0} |D^i X_n(x)| |h^1| \dots |h^i| \left| \sum_{n \geq n_0} x_n e_n \right| + \sum_j |h^j| \sup_{n \geq n_0} |D^{i-1} X_n(x)| \cdot |h^1| \dots |\hat{h}^j| \dots |h^i| .$$

Or (voir appendice B_3) il existe des constantes b_i telles que :

$$|D^i X_n(x)| < \frac{b_i}{r^i} \quad |D^{i-1} X_{n-1}(x)| < \frac{b_{i-1}}{r^{i-1}}$$

$$|D^i \Psi(x)| < (b_i + i b_{i-1}) r^{1-i} .$$

$$e) |x - \Psi(x)| \leq r .$$

$$x - \Psi(x) = \sum_{n \geq n_0} x_n (1 - X_n(x)) e_n .$$

Remarque. Si x est dans B_0 $\Psi(x)$ est dans B_0 .

3°) Définition et propriétés de g .

$$\text{Posons} \quad g(x) = \bar{f}(\Psi(x)) + \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{1}{i!} L^i(\Psi(x)) \cdot (x - \Psi(x))^i .$$

Propriétés de la fonction g .

a) g est de classe C^∞ .

Pour tout point x de E , il existe un voisinage U_x de x et un entier

$n(x)$ tel que $\Psi(U_x) \subset E_{n(x)}$ quel que soit y point de U_x

$$g(y) = \bar{f}_{n(x)}(\Psi(y)) + \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{1}{i!} L_{n(x)}^i(\Psi(y)) \cdot (y - \Psi(y))^i$$

g , composée d'applications de classe C^∞ est de classe C^∞ .

b) Il existe une constante λ_0 telle que

$$\sup_{x \in B_0} |f(x) - g(x)| < \lambda_0 \varepsilon r^{k-1}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\Psi(x)) + \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{1}{i!} D^i f(\Psi(x)) \cdot (x - \Psi(x))^i \\ &\quad + \frac{1}{k!} \int_0^1 D^k f(\Psi(x) + t(x - \Psi(x))) \cdot (x - \Psi(x))^k dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f(\Psi(x)) - \bar{f}(\Psi(x)) + \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{1}{i!} [D^i f(\Psi(x)) - L^i(\Psi(x)) \cdot (x - \Psi(x))^i] \\ &\quad + \frac{1}{k!} \int_0^1 D^k f(\Psi(x) + t(x - \Psi(x))) \cdot (x - \Psi(x))^k dt. \end{aligned}$$

$$\sup_{x \in B_0} |f(x) - g(x)| \leq 3\varepsilon r^{k-1} \sum_{0 \leq i \leq k-1} \frac{1}{i!} + \frac{1}{k!} \bar{\eta} r^k.$$

$$\text{Or } \bar{\eta} r^k = \varepsilon r^{k-1}.$$

Posons $\lambda_0 = 3\varepsilon$. La propriété b) est démontrée.

c) Il existe une constante λ_1 telle que

$$\sup_{x \in B_0} |D^1 f(x) - D^1 g(x)| < \lambda_1 \varepsilon r^{k-2}.$$

Dans la suite de cet exposé (c) et d)), x étant un point de E , pour simplifier les notations lorsque aucune confusion ne sera possible, nous poserons $\Psi(x) = z$.

Tous les calculs seront supposés faits dans un voisinage U_{x_0} d'un point x_0 tel qu'il existe un entier n $\Psi(U_{x_0}) \subset E_n$.

θ étant une fonction définie sur E à valeurs dans un espace de Banach, nous noterons, si elles existent, par $D_n^j \theta$, la différentielle d'ordre j de la restriction à E_n de θ , par $D^j \theta$, la différentielle d'ordre j de θ .

En tout point x de E $D_n^j \theta(x)$ est une forme j -multilinéaire et si $D^j \theta(x)$ existe :

$$D_n^j \theta(x) \cdot (h^1, \dots, h^j) = D^j \theta(x) \cdot (\pi_n(h^1), \dots, \pi_n(h^j)).$$

F^j étant une forme j -multilinéaire, nous noterons $F^j \circ \pi_n^{(j)}$ la forme j -multilinéaire :

$$F^j \circ \pi_n^{(j)} \cdot (h^1, \dots, h^j) = F^j \cdot (\pi_n(h^1), \dots, \pi_n(h^j))$$

$$D^j(\theta \circ \pi_n)(x) = D_n^j \theta(\pi_n(x)).$$

Avec ces notations $D^1(\theta \circ \Psi)(x) = D_n^1 \theta(z) \cdot D^1 \Psi(x)$

$$\begin{aligned} D^1 g(x) &= \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{1}{(i-1)!} L^i(z) \cdot (x-z)^{i-1} \\ &+ [(D_n^1 \bar{f}(z) - L^1(z)) + \sum_{1 \leq i \leq k-2} (D_n^1 L^i(z) - L^{i+1}(z)) \cdot \frac{(x-z)^i}{i!} \\ &+ D_n^1 L^{k-1}(z) \cdot \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!}] \cdot D^1 \Psi(x) \end{aligned}$$

$$D^1 f(x) = \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{1}{(i-1)!} D^i f(z) \cdot (x-z)^{i-1} + \int_0^1 \frac{1}{(k-1)!} D^k f(z + t(x-z)) \cdot (x-z)^{k-1} dt.$$

Retranchons ces deux égalités membre à membre. De même que précédemment la différence des premiers termes est majorée par $2\epsilon \epsilon r^{k-2}$.

D'autre part :

$$\sup_{\substack{x \in B_0 \\ |x-z| < r}} \left| \int_0^1 \frac{1}{(k-1)!} D^k f(z + t(x-z)) \cdot (x-z)^{k-1} \right| < \bar{\eta} \frac{r^{k-1}}{(k-1)!} < \epsilon \frac{r^{k-2}}{(k-1)!}.$$

L'existence de la constante λ_1 sera donc une conséquence du lemme suivant :

Lemme c_1 . $|D_n^1 \bar{f}_n(y) - L_n^1(y) \circ \pi_n^{(1)}| \leq 2\epsilon r^{k-2}$

$$|D_n^1 L_n^i(y) - L_n^{i+1}(y) \circ \pi_n^{(1)}| \leq 2\epsilon r^{k-2-i}$$

$$\|D_n^1 L_n^{k-1}(y)\| < 2\bar{\eta}.$$

(Nous rappelons la convention d'écriture suivante :

$$L_n^{i+1}(y) \circ \pi_n^{(1)}(h_1, \dots, h_{i+1}) = L_n^{i+1}(y) \cdot (\pi_n(h_1), h_2, \dots, h_{i+1}).$$

Démonstration. Nous la faisons dans le cas général pour i quelconque ; elle s'applique au cas $i=0$ avec la convention $L_n^0 = \bar{f}_n$.

Par définition :

$$L_n^i(y) = D_n^{i\hat{f}}(y) + L_{n-1}^i(\pi_{n-1}(y)) - D_n^{i\hat{f}}(\pi_{n-1}(y))$$

$$D_n^1 L_n^i(y) = D_n^{i+1\hat{f}}(y) \circ \pi_n^{(1)} + D_{n-1}^1 L_{n-1}^i(\pi_{n-1}(y)) \circ \pi_{n-1}^{(1)} - D_n^{i+1\hat{f}}(\pi_{n-1}(y)) \circ \pi_{n-1}^{(1)}$$

$$\begin{aligned} D_n^1 L_n^i(y) - L_n^{i+1}(y) \circ \pi_n^{(1)} &= D_{n-1}^1 L_{n-1}^i(\pi_{n-1}(y)) - L_{n-1}^{i+1}(\pi_{n-1}(y)) \circ \pi_{n-1}^{(1)} \\ &\quad + D_n^{i+1\hat{f}}(\pi_{n-1}(y)) - L_{n-1}^{i+1}(\pi_{n-1}(y)) \circ (\pi_n^{(1)} - \pi_{n-1}^{(1)}). \end{aligned}$$

Pour $n=0$ la différence est nulle. Par induction nous trouvons :

$$\begin{aligned} D_n^1 L_n^i(y) - L_n^{i+1}(y) \circ \pi_n^{(1)} &= \sum_{0 \leq p \leq n-1} [D_{p+1}^{i+1\hat{f}}(\pi_p(y)) - L_p^{i+1}(\pi_p(y))] \cdot (\pi_{p+1}^{(1)} - \pi_p^{(1)}) \\ (D_{p+1}^{i+1\hat{f}} - L_p^{i+1})(\pi_p(y)) &= (D_{p+1}^{i+1\hat{f}} - D_p^{i+1\hat{f}})(\pi_p(y)) + (D_p^{i+1\hat{f}} - L_{p-1}^{i+1})(\pi_{p-1}(y)). \end{aligned}$$

Par définition de $\hat{f}_p$

$$|D_{p+1}^{i+1\hat{f}} - D_p^{i+1\hat{f}}| \leq \frac{2 \varepsilon r^{k-1-i}}{2^{p+1}}.$$

Nous pouvons calculer de même :

$$D_n^1 L_n^{k-1}(y) \circ \pi_n^{(1)} = D_n^{k\hat{f}}(y) \circ \pi_n^{(1)} + \sum_{1 \leq p \leq n-1} (D_{p+1}^{k\hat{f}}(\pi_p(y)) - D_p^{k\hat{f}}(\pi_p(y))) \circ \pi_{p-1}^{(1)}$$

$$|D_n^1 L_n^{k-1}(y)| \leq \bar{n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \sum_{1 \leq p \leq n-1} \frac{2 \bar{\eta}}{2^{p-1}} \leq 2 \bar{\eta}.$$

Le lemme c_1 est donc démontré.

Fin de la démonstration de la propriété c).

$$\sup_{\substack{x \in B_0 \\ |x-z| < \eta}} \left| \sum_{0 \leq i \leq k-2} (D_n^1 L_n^i(z) - L_n^{i+1}(z)) \cdot \frac{(x-z)^i}{i!} + D_n^1 L_n^{k-1}(z) \cdot \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!} \right| \leq 2e \varepsilon r^{k-2}.$$

Il suffit de poser $\lambda_1 = 2e + 1$.

d) Il existe des constantes λ_i ($1 \leq i \leq k$) telles que :

$$1 \leq i \leq k-1 \quad \sup_{x \in B_0} |D^i f(x) - D^i g(x)| \leq \lambda_i \varepsilon r^{k-1-i}$$

$$\sup_{x \in B_0} |D^k f(x) - D^k g(x)| \leq \lambda_k \bar{\eta}.$$

La démonstration est une simple généralisation de celle de la propriété c).

Elle se fait par une suite de lemmes.

Lemme d₁. Soit α ($1 \leq \alpha \leq k$) un entier et x un point de E . $\Psi(x) = z$

z est en point de E_n .

Désignons par $\mathcal{M}_\alpha$ l'ensemble des monômes à au plus α indéterminées $(X_1, \dots, X_\alpha)$

de poids inférieur ou égal à α de coefficient directeur 1.

$\mathcal{M}_\alpha$ est un ensemble fini :

$$D^\alpha g(x) = \sum_{\alpha \leq i \leq k-1} \frac{1}{(i-\alpha)!} L^i(z) \cdot (x-z)^{i-\alpha}$$

$$+ \sum_{Q \in \mathcal{M}_\alpha} \mathcal{L}_Q(x) \cdot Q(D^1 \Psi(x), \dots, D^\alpha \Psi(x)).$$

(Si $\alpha = k$ seul subsiste le deuxième terme de cette somme) $\mathcal{L}_Q$ et Q sont

liés par la condition suivante :

Condition C _{α} .

Désignons par β_Q le poids de Q

γ_Q le degré de Q

(si $d_\ell(Q)$ désigne le degré de Q par rapport à l'indéterminée X_ℓ ,

$$\beta_Q = \sum_{1 \leq \ell \leq \alpha} \ell d_\ell(Q) \quad \gamma_Q = \sum_{1 \leq \ell \leq \alpha} d_\ell(Q)).$$

Condition C _{α} .

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{L}_Q(x) \text{ est une forme } \alpha - \beta_Q + \gamma_Q \text{ multilinéaire} \\ \mathcal{L}_Q(x) = \sum_{\alpha - \beta_Q \leq i \leq k} \frac{1}{(i - \alpha + \beta_Q)!} \mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x-z)^{i - \alpha + \beta_Q} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}_Q^i(x) = \sum_{h \leq i} a_Q^{i,h} (D_n^{\eta_{h+1}} L^h(z) - \varepsilon_h D_n^{\eta_h} L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)})$$

où $\varepsilon_h = 1$ si $h \leq k-1$ $\varepsilon_h = 0$ si $h = k-1$

$$1 + \eta_h + h - i = \gamma_Q \quad a_Q^{i+1,h+1} = a_Q^{i,h}.$$

Les $a_Q^{i,h}$ sont des éléments de Z dépendant de α, Q, i, h mais indépendants de la fonction f , du point x , de Ψ .

D'après les conditions sur le degré et le poids de Q , on vérifie que $D^\alpha g(x)$ est une forme α -multilinéaire.

Démonstration du lemme d₁.

Elle se fait par récurrence sur α .

Si $\alpha=1$ il est vérifié.

Supposons le vrai à l'ordre α et montrons le à l'ordre $\alpha+1$.

En différentiant une fois l'expression de $D^\alpha g(x)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D^{\alpha+1} g(x) &= \sum_{\alpha+1 \leq i \leq k-1} \frac{1}{(i-\alpha-1)!} L^i(z) \cdot (x-z)^{i-\alpha-1} \\ &+ \sum_{\alpha \leq i \leq k-1} [(D_n^1 L^i(z) - L^{i+1}(z) \circ \pi_n^{(1)}) \cdot \frac{(x-z)^{i-\alpha}}{(i-\alpha)!} + D^1 L^{k-1}(z) \frac{(x-z)^{k-1-\alpha}}{(k-1-\alpha)!}] D^1 \Psi(x) \\ &+ \sum_{Q \in \mathcal{A}_\alpha} D^1 \mathcal{L}_Q(x) \cdot Q(D^1 \Psi(x), \dots, D^\alpha \Psi(x)) \\ &+ \sum_{Q \in \mathcal{A}_\alpha} \mathcal{L}_Q(x) \cdot DQ(D^1 \Psi(x), \dots, D^\alpha \Psi(x)). \end{aligned}$$

Montrons que chacune des 3 dernières lignes du 2ème membre de cette égalité peut

se mettre sous la forme d'une somme de termes vérifiant la condition $C_{\alpha+1}$.

Etude de la 2ème ligne.

Posons $Q_1(X_1, \dots, X_{\alpha+1}) = X_1$ $\beta_{Q_1} = \gamma_{Q_1} = 1$

$$\mathcal{L}_{Q_1}^i(x) = D_n^1 L^i(z) - L^{i+1}(z) \circ \pi_n^{(1)}.$$

En remarquant que $i - \alpha = i - (\alpha + 1) + \beta_{Q_1}$ la condition $C_{\alpha+1}$ est vérifiée pour la deuxième ligne.

Etude de la 3ème ligne.

$$\begin{aligned} D^1 \mathcal{L}_Q(x) &= D^1 \left(\sum \frac{1}{(i - \alpha + \beta_Q)!} \mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x - \Psi(x))^{i - \alpha + \beta_Q} \right) \\ &= \sum_{i \geq \alpha - \beta_Q + 1} \frac{1}{(i - \alpha + \beta_Q - 1)!} \mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x - \Psi(x))^{i - \alpha + \beta_Q - 1} \\ &\quad + \sum_{i \geq \alpha - \beta_Q} \left[(D_n^1 \mathcal{L}_Q^i(x) - \varepsilon_i \mathcal{L}_Q^{i+1}(x) \circ \pi_n^{(1)}) \cdot \frac{(x - \Psi(x))^{i - \alpha + \beta_Q}}{(i - \alpha + \beta_Q)!} \right] \cdot D^1 \Psi(x) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_i = 1$ si $i \neq k-1$ $\varepsilon_i = 0$ si $i = k-1$.

$$\begin{aligned} \text{Posons } \mathcal{L}'_Q(x) &= \sum_{i \geq \alpha - \beta_Q + 1} \frac{1}{(i - \alpha + \beta_Q - 1)!} \mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x - \Psi(x))^{i - \alpha + \beta_Q - 1} \\ \mathcal{L}'_Q(x) \cdot Q(D^1 \Psi, \dots, D^{\alpha} \Psi) &\text{ vérifie la condition } C_{\alpha+1} \end{aligned}$$

(en écrivant $i - \alpha + \beta_Q - 1 = i - (\alpha + 1) + \beta_Q$).

Posons $\bar{Q}(X_1, \dots, X_\alpha) = X_1 Q(X_1, \dots, X_\alpha)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\bar{Q}}(x) &= \sum_{i \geq \alpha - \beta_Q} (D_n^1 \mathcal{L}_Q^i(x) - \varepsilon_i \mathcal{L}_Q^{i+1}(x) \circ \pi_n^{(1)}) \cdot \frac{(x - \Psi(x))^{i - \alpha + \beta_Q}}{(i - \alpha + \beta_Q)!} \\ D_n^1 \mathcal{L}_Q^i(x) - \varepsilon_i \mathcal{L}_Q^{i+1}(x) \circ \pi_n &= \sum (a_{Q^-}^{i,h} - \varepsilon_i a_Q^{i+1,h}) [D_n^{\eta_{h+2}} L^h - D_n^{\eta_{h+1}} L^h \circ \pi_n^{(1)}] \\ &\quad - \varepsilon_i a_Q^{i+1,i+1} [D_n^{\eta_{i+1}+1} L^{i+1} - D_n^{\eta_{i+1}} L^{i+1} \circ \pi_n^{(1)}] . \end{aligned}$$

Or $\eta_h + h + 2 - i = \gamma_Q + 1 = \gamma_{\bar{Q}}$.

En écrivant $i - \alpha + \beta_Q = i - (\alpha + 1) + \beta_Q + 1$
 $= i - (\alpha + 1) + \beta_{\bar{Q}}$.

On voit que $\mathcal{L}'_{\bar{Q}}(x) \bar{Q}$ vérifie aussi la condition $C_{\alpha+1}$.

Etude de la 4ème ligne.

Q étant un monôme à j indéterminées $X_1, \dots, X_j$; soit Q'_ℓ la dérivée d'ordre 1 de Q par rapport à l'indéterminée X_ℓ .

$$DQ(D^1\Psi(x), \dots, D^j\Psi(x)) = \sum_{1 \leq \ell \leq j} Q'_\ell(D^1\Psi, \dots, D^j\Psi) \times D^{\ell+1}\Psi(x).$$

Posons $Q''_\ell = Q'_\ell \times X_{\ell+1}$.

Soient d_i, d'_i, d''_i les degrés respectifs de Q, Q'_ℓ, Q''_ℓ par rapport à l'indéterminée X_i .

Si $i \neq \ell$ et $i \neq \ell+1$ $d_i = d'_i = d''_i$

$$d_{\ell-1} = d'_\ell = d''_\ell \quad d_{\ell+1} + 1 = d'_{\ell+1} + 1 = d''_\ell$$

$$\beta_{Q''_\ell} = \beta_Q + 1$$

$$\gamma_{Q''_\ell} = \gamma_Q$$

$$\beta_{Q''_\ell} - \gamma_{Q''_\ell} = \beta_Q - \gamma_Q + 1.$$

Posons $\mathcal{L}_{Q''_\ell}(x) = \mathcal{L}_Q(x)$.

En écrivant $i - \alpha + \beta_Q = i - (\alpha+1) + \beta_{Q''_\ell}$, on vérifie que $\mathcal{L}_{Q''_\ell}(x) \cdot Q''_\ell(D^1\Psi, \dots, D^{\alpha+1}\Psi)$ vérifie la condition $C_{\alpha+1}$.

Lemme d_2 . (Généralisation du lemme c_1)

$$\begin{aligned} h+\eta+1 \leq k-1 & \quad \sup_{z \in B_0} |D_n^{\eta+1} L^h(z) - D_n^\eta L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)}| \leq 2\varepsilon r^{k-2h-\eta} \\ k \leq h+\eta+1 \leq 2k-1 & \quad \sup_{z \in B_0} |D_n^{\eta+1} L^h(z) - D_n^\eta L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)}| \leq 2\bar{\eta}. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous remarquons que

$$D_n^{\eta+1} D^h \hat{f}_n(z) = D_n^\eta D^{h+1} \hat{f}_n(z) \circ \pi_n^{(1)}.$$

Le même calcul que celui fait dans le cas $\eta=0$ montre que :

$$\begin{aligned} D_n^{\eta+1} L^h(z) - D_n^\eta L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)} &= \sum_{0 \leq p \leq n-1} [D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_{p+1}(\pi_p(z)) - D_p^\eta L_p^{h+1}(\pi_p(z))] \circ \\ &\quad \circ (\pi_{p+1}^{(1)} - \pi_p^{(1)}). \end{aligned}$$

Or en un point y de E_p :

$$D_p^\eta L_p^{h+1}(y) = D_p^\eta D^{h+1} \hat{f}_p(y) + D_{p-1}^\eta L_{p-1}^{h+1}(\pi_{p-1}(y)) - D_{p-1}^\eta D^{h+1} \hat{f}_p(\pi_{p-1}(y))$$

$$+ D_{p-1}^{\eta} D^{h+1} \hat{f}_p(\pi_{p-1}(y)) - D_{p-1}^{\eta} L_{p-1}^{h+1}(\pi_{p-1}(y))$$

$$D_n^{\eta+1} L^h(z) - D_n^{\eta} L^{h+1}(z) \circ \pi_n^{(1)} = \sum_{0 \leq p \leq n-1} [D_p^{\eta} D^{h+1} \hat{f}_{p+1}(\pi_p(z)) - D_p^{\eta} D^{h+1} \hat{f}_p(\pi_p(z))] \circ (\pi_n^{(1)} - \pi_p^{(1)}).$$

Par définition de $\hat{f}_q$

$$\eta+h+1 \leq k-1 \quad \sup_{y \in B_0} |D_q^{\eta} D^{h+1} \hat{f}_{q+1}(\pi_q(y)) - D_q^{\eta} D^{h+1} f(\pi_q(y))| \leq \frac{\varepsilon r^{k-2-h-\eta}}{2^{q+1}}$$

$$k \leq \eta+h+1 \leq 2k-1 \quad \sup_{y \in B_0} |D_q^{\eta} D^{h+1} \hat{f}_{q+1}(\pi_q(y)) - D_q^{\eta} D^{h+1} f(\pi_q(y))| < \frac{\bar{\eta}}{2^{q+1}}$$

$$\eta+h+1 \leq k-1 \quad \sup_p |D_p^{\eta} D^{h+1} \hat{f}_{p+1}(y) - D_p^{\eta} D^{h+1} \hat{f}_p(y)| \leq \frac{3\varepsilon r^{k-2-h-\eta}}{2^{q+1}}$$

$$0 \leq \eta+h+1 \leq 2k-1 \quad \leq \bar{\eta} \times 2^{-q-1}.$$

Le lemme d_3 est donc démontré.

Fin de la démonstration de la propriété d).

Considérons l'expression de $D^{\alpha}g(x)$ du lemme d_1 .

$$D^{\alpha}g(x) - D^{\alpha}f(x) = \sum_{\alpha \leq i \leq k-1} \frac{1}{(i-\alpha)!} (L^i(z) - D^i f(z)) \cdot (x-z)^{i-\alpha} \\ + \sum_{Q \in \mathcal{A}_\alpha} \mathcal{L}_Q(x) \times Q(D^1 \Psi(x), \dots, D^{\alpha} \Psi(x)) \\ - \frac{1}{(k-\alpha)!} \int_0^1 D^k f(z+tx) \cdot (x-z)^{k-\alpha} dt$$

$$\left| \sum_{\alpha \leq i \leq k-1} \frac{1}{(i-\alpha)!} (L^i(z) - D^i f(z)) \cdot (x-z)^{i-\alpha} \right| \leq \sum_{\alpha \leq i \leq k-1} \frac{1}{(i-\alpha)!} 2\varepsilon r^{k-1-i} \times r^{i-\alpha} \\ \leq 2\varepsilon r^{k-\alpha}$$

$$\left| \int_0^1 D^k f(z+tx) \cdot (x-z)^{k-\alpha} dt \right| \leq \eta r^{k-\alpha}.$$

$\mathcal{L}_Q(x) \times Q(D^1 \Psi, \dots, D^{\alpha} \Psi)$ est une application α -multilinéaire de E dans F .

Soit $(U_1, \dots, U_\alpha)$ une suite de α vecteurs.

$$Q(D^1 \Psi, \dots, D^{\alpha} \Psi) \cdot (U_1, \dots, U_\alpha) = (v_1, \dots, v_{\alpha-\beta_Q+\gamma_Q})$$

(L'opérateur $(D^\ell \Psi)^d$ transforme une suite de ℓ d_ℓ vecteurs de E en une suite de d_ℓ vecteurs de E).

D'autre part, d'après la propriété d) de l'opérateur Ψ .

$$|D^\ell \Psi.(U_1, \dots, U_\ell)| \leq C_\ell r^{1-\ell} |U_1| \dots |U_\ell|.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } |v_1| \times \dots \times |v_{\alpha-\beta_Q+\gamma_Q}| &\leq \prod_{1 \leq \ell \leq \alpha} (C_\ell)^{d_\ell} (r^{1-\ell})^{d_\ell} |U_1| \times \dots \times |U_\alpha| \\ &\leq \left(\prod_{1 \leq \ell \leq \alpha} (C_\ell)^{d_\ell} \right) r^{\gamma_Q - \beta_Q} |U_1| \times \dots \times |U_\alpha| \end{aligned}$$

Appliquons le lemme d_3 pour majorer $|\mathcal{L}_Q^i|$ (en remarquant que pour tous les termes de $\mathcal{L}_Q^i$ la somme $\eta_h + h + 1$ est constante).

Il existe des constantes C_Q^i (dépendant exclusivement des $a_Q^{i,h}$) telles que

$$\text{si } \gamma_Q + i \leq k-1 \quad |\mathcal{L}_Q^i| \leq C_Q^i \varepsilon r^{k-1-\gamma_Q-i}$$

$$\text{si } k \leq \gamma_Q + i \leq 2k-1 \quad |\mathcal{L}_Q^i| \leq C_Q^i \bar{\eta}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc si } \gamma_Q + i \leq k-1 \quad \|\mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times_Q\| &\leq C_Q^i \times \prod_{1 \leq \ell \leq \alpha} (C_\ell) \times \\ &\quad \times \varepsilon r^{k-1-\gamma_Q-i} \times r^{i-\alpha+\beta_Q} \times r^{\gamma_Q} \end{aligned}$$

$$\text{en posant } b_Q^i = C_Q^i \prod_{1 \leq \ell \leq \alpha} (C_\ell)^{d_\ell}$$

$$|\mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times_Q| \leq b_Q^i \varepsilon r^{k-1-\alpha}.$$

De même si $k \leq \gamma_Q + i \leq 2k-1$, il existe une constante b_Q^i telle que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times_Q| &\leq b_Q^i \bar{\eta} r^{i-\alpha+\beta_Q} \times r^{\gamma_Q - \beta_Q} \\ &\leq b_Q^i \bar{\eta} r^{i-\alpha+\gamma_Q} \\ &\leq b_Q^i \bar{\eta} r^{k-\alpha} \end{aligned}$$

Or nous avons posé $r = \frac{\varepsilon}{\bar{\eta}}$.

$$|\mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times Q| \leq b_Q^i \varepsilon r^{k-1-\alpha} \quad \text{si } \alpha < k$$

$$|\mathcal{L}_Q^i(x) \cdot (x-z)^{i-\alpha+\beta_Q} \times Q| \leq b_Q^i \bar{\eta} \quad \text{si } \alpha = k.$$

Or d'après la construction par récurrence de $\mathcal{L}_Q^i$

$$\begin{cases} \eta_h + 1 \leq \alpha & \text{Donc } 1 + \eta_h + 1 \leq \alpha + k - 1 \\ h \leq k - 1 & \leq 2k - 1 \end{cases}.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_a$ des monômes Q étant fini la propriété d) est démontrée.

Le lemme fondamental est démontré.

B₂) Fin de la démonstration du théorème 1.

Soit $\varepsilon(x)$ une fonction continue définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, strictement positive.

f étant une fonction de classe C^{2k-1} définie sur Ω à valeurs dans F , nous allons montrer qu'il existe une application g de classe C^∞ définie sur Ω , à valeurs dans F telle que, quel que soit x dans Ω , et quel que soit α $0 \leq \alpha \leq k$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| < \varepsilon(x).$$

Définition d'un recouvrement dénombrable de Ω .

Lemme 1. Quel que soit x élément de Ω , il existe une boule $B'(x)$ de centre x et de rayon $\rho'(x)$, contenue dans Ω telle que

$$a) \sup_{(y, y') \in B'(x)} |\varepsilon(y) - \varepsilon(y')| < \inf_{z \in B'(x)} \frac{1}{2} \varepsilon(z)$$

$$b) \sup_{(y, y') \in B'(x)} \|D^k f(y) - D^k f(y')\| < \inf_{z \in B'(x)} \varepsilon(z)$$

$$c) \text{ si } B'(x) \cap B'(y) \neq \emptyset \quad \frac{1}{4} \frac{\rho'(x)}{\rho'(y)} < 4$$

$$d) \sup_{x \in \Omega} \rho'(x) < 2.$$

La démonstration est la même que celle faite dans le cas $k=1$ (partie A_2 de la démonstration).

Construction d'une fonction g de classe C^∞ "proche" de f .

Considérons les fonctions φ_n définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{|x-a_n|^{2k}}{\rho_n^{2k}}\right)$$

φ_n est de classe C^∞ égale à 1 sur B_n ; 0 en dehors de B'_n .

Considérons les fonctions :

$$\ell_n(x) = f(a_n) + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{1}{i!} D^i f(a_n) \cdot (x-a_n)^i$$

$$D^k \ell_n(x) = D^k f(a_n)$$

$$\sup_{x \in B'_n} |D^k \ell_n(x) - D^k f(x)| < \varepsilon_n.$$

A la fonction $(f - \ell_n)$ nous pouvons appliquer sur B'_n le lemme fondamental.

Il existe une fonction δ_n de classe C^∞ telle que :

$$\sup_{x \in B'_n} |f(x) - \ell_n(x) - \delta_n(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n^k$$

$$1 \leq i \leq k-1 \quad \sup_{x \in B'_n} |D^i f(x) - D^i \ell_n(x) - D^i \delta_n(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n^{k-i}$$

$$\sup_{x \in B'_n} |D^k f(x) - D^k \ell_n(x) - D^k \delta_n(x)| < \lambda \varepsilon_n$$

(où λ est une constante indépendante de n).

Posons $\tilde{f}_n(x) = \delta_n(x) + \ell_n(x)$.

$\tilde{f}_n$ est une fonction de classe C^∞ telle que :

$$(i) \quad \sup_{x \in B'_n} |\tilde{f}_n(x) - f(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n^k$$

$$(ii) \quad \sup_{x \in B'_n} |D^i \tilde{f}_n(x) - D^i f(x)| < 2^{-n} \varepsilon_n \rho_n^{k-i} \quad \text{si } i < k$$

$$(iii) \sup_{x \in B'_n} \|D^{k\sim} f_n(x) - D^k f(x)\| < \lambda \varepsilon_n.$$

Nous définissons une suite de fonctions g_n :

$$g_n = f + \varphi_1(\tilde{f}_1 - f) + \varphi_2(1 - \varphi_1)(\tilde{f}_2 - f) + \dots \\ + \varphi_n(1 - \varphi_{n-1}) \dots (1 - \varphi_1)(\tilde{f}_n - f).$$

Propriétés de la suite g_n .

[P₁] La suite g_n se stabilise.

[P₂] Sur B_n g_n est de classe C^∞ .

[P₃] Il existe des constantes λ'_i ($0 \leq i \leq k-1$) indépendantes de n

telles que :

$$0 \leq i \leq k-1 \quad \sup_{x \in B_n} |D^i g_n(x) - D^i f(x)| < \lambda'_i \varepsilon_n \rho_n^{k-i}$$

$$i = k \quad \sup_{x \in B_n} |D^k g_n(x) - D^k f(x)| < \lambda'_k \varepsilon_n.$$

Si $i=0$ la démonstration est la même que celle faite dans le cas $k=1$.

Posons $\mu_n = \varphi_n(1 - \varphi_{n-1}) \dots (1 - \varphi_1)$.

$$D^i g_n - D^i f = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha + \beta = i}} \binom{i}{\alpha} \sum_{1 \leq p \leq n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f).$$

Majorons $\sum_{1 \leq p \leq n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f)$

$$D^\alpha \mu_p(x) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} r_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} D^{\alpha_p} \varphi_p \times \dots \times D^{\alpha_1}(1 - \varphi_1).$$

La sommation étant étendue à l'ensemble des familles ordonnées de p entiers

positifs ou nuls $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ tels que :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = \alpha$$

$$\text{si } \alpha_i > 0 \quad D^{\alpha_i}(1 - \varphi_i) = -D^{\alpha_i} \varphi_i.$$

Calculons $\sum_{1 \leq p \leq n} D^{\alpha}_{\mu_p}(x) D^{\beta}(\tilde{f}_p - f)$ en développant chaque $D^{\alpha}_{\mu_p}$ suivant l'expression précédente et en regroupant les termes contenant comme facteur la même expression $D^{\alpha_1}_{\varphi_{n_1}} \times \dots \times D^{\alpha_q}_{\varphi_{n_q}}$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_q = \alpha$.

$$\sum_{1 \leq p \leq n} D^{\alpha}_{\mu_p}(x) D^{\beta}(\tilde{f}_p - f) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_q)} r_{\alpha_1 \dots \alpha_q} D^{\alpha_1}_{\varphi_{n_1}} \times \dots \times D^{\alpha_q}_{\varphi_{n_q}} \\ \times \sum_{\substack{n_q \leq l \leq m \\ q}} \varphi_l (1 - \varphi_{l-1}) \dots (1 - \varphi_{n_q}) (1 - \varphi_{m_q}) \dots (1 - \varphi_{m_1}) (D^{\beta}_{\tilde{f}_l} - D^{\beta}_f).$$

Dans cette expression nous avons convenu d'écrire $n_1 < n_2 < \dots < n_q$. La suite croissante $(m_1, \dots, m_q)$ est complémentaire de la suite $(n_1, \dots, n_q)$ dans l'ensemble $(1, 2, \dots, n_q)$

$$\text{or } \sup_{x \in B'_l} \|D^{\beta}_{\tilde{f}_l} - D^{\beta}_f\| \leq 2^{-l} \varepsilon_l \rho_l^{k-\beta} \quad \text{si } \beta < l \\ \sup_{x \in B'_l} \|D^h_{\tilde{f}_l} - D^k_f\| \leq 2^{-l} \varepsilon_l.$$

Le coefficient dans ε_n de $D^{\beta}(\tilde{f}_l - f)$ est non nul si et seulement si $B'_l \cap B'_n \neq \emptyset$.

$$\text{Donc } \sup_{x \in B'_l \cap B'_n} |D^{\beta}_{\tilde{f}_l}(x) - D^{\beta}_f(x)| \leq 2^{-l+1} \varepsilon_n 2^{k-\beta} \rho_n^{k-\beta}.$$

Le même raisonnement que celui fait dans le cas $k=1$ montre que :

$$\sum_{\substack{n_q \leq l \leq n \\ q}} \varphi_l (1 - \varphi_{l-1}) \dots (1 - \varphi_{n_q}) (1 - \varphi_{m_q}) \dots (1 - \varphi_{m_1}) [D^{\beta}(\tilde{f}_l - f)] \leq 2^{-n_q+2} \varepsilon_n 2^{k-\beta} \rho_n^{k-\beta}.$$

Supposons donnée une famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ $\alpha_1 + \dots + \alpha_q = \alpha$. L'entier n_q étant fixé, il existe $\frac{(n-1)!}{(n-q)!}$ familles $(n_1, \dots, n_q)$ contenant comme facteur l'expression $D^{\alpha_1}_{\varphi_{n_1}} \times \dots \times D^{\alpha_q}_{\varphi_{n_q}}$.

Désignons par $N(q)$ ($q < \alpha$) le nombre de suites ordonnées $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ de q entiers strictement positifs tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_q = \alpha$. $N(q)$ dépend uniquement de q et de α . Posons $\bar{N}(\alpha) = \sup_{q \leq \alpha} N(q)$.

Il existe donc au plus $\bar{N}(\alpha) \times n_q^\alpha$ termes de la somme $\sum_{1 \leq p \leq n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f)$ contenant comme facteur $D^{\alpha_1} \varphi_{n_1} \times \dots \times D^{\alpha_q} \varphi_{n_q}$ ($\alpha_1 + \dots + \alpha_q = \alpha$, $n_1 < \dots < n_q$)

chacun de ces termes est majoré par

$$2^{-n_q+2} \epsilon_n 2^{k-\beta} \rho_n^{k-\beta}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left| \sum_{1 \leq p \leq n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f) \right| &\leq \sum_{1 \leq n_q \leq n} \bar{N}(\alpha) \times n_q^\alpha \times 2^{-n_q+2} \epsilon_n 2^{k-\beta} \rho_n^{k-\beta} \\ &\quad \times \sup |r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_q}| \times \sup |D^{\alpha_1} \varphi_{n_1} \times \dots \times D^{\alpha_q} \varphi_{n_q}|. \end{aligned}$$

La série de terme général $n^\alpha 2^{-n}$ étant convergente il existe une constante K , indépendante de n telle que :

$$\sup_{x \in B_n} \left| \sum_{1 \leq p \leq n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f) \right| \leq K \epsilon_n \rho_n^{k-\beta} \times \sup |D^{\alpha_1} \varphi_{n_1} \times \dots \times D^{\alpha_q} \varphi_{n_q}|.$$

Or d'après l'appendice (B₃) il existe des constantes K^j ($1 \leq j \leq \alpha$) telles que :

$$|D^j \varphi_\ell(x)| < \frac{K^j}{\rho_\ell^j}$$

$$\text{si } B'_\ell \cap B_n \neq \emptyset \quad \|D^j \varphi_\ell(x)\| \leq \frac{K^j \times 2^j}{\rho_n^j}.$$

$$|D^{\alpha_1} \varphi_{n_1} \times \dots \times D^{\alpha_q} \varphi_{n_q}| \leq \prod_{j=\alpha_1}^{j=\alpha_q} K^j 2^j \rho_n^{-j}.$$

Or $\alpha_1 + \dots + \alpha_q = \alpha$. Il existe une constante $\bar{K}$

$$|D^{\alpha_1} \varphi_{n_1} \times \dots \times D^{\alpha_q} \varphi_{n_q}| \leq \bar{K} \rho_n^{-\alpha}.$$

Il existe une constante $\bar{K}_i$ ($i = \alpha + \beta$)

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_n} \left| \sum_{1 \leq p \leq n} D^\alpha \mu_p(x) D^\beta(\tilde{f}_p - f) \right| &\leq \bar{K}_i \epsilon_n \rho_n^{k-i} \\ \sup_{x \in B_n} |D^i g_n(x) - D^i f| &\leq 2^i \bar{K}_i \epsilon_n \rho_n^{k-i}. \end{aligned}$$

Le même calcul se fait dans le cas $i = k$.

$$\sup_{x \in B_n} |D^k g_n(x) - D^k f(x)| \leq 2^i \bar{K}_k \epsilon_n.$$

La propriété $[P_3]$ est donc vérifiée.

Posons $g = \varinjlim g_n$.

g est de classe C^∞ et il existe des constantes $\bar{\lambda}_i$ telles que :

$$0 \leq i \leq k \quad \sup_{x \in \Omega} |D^i g(x) - D^i f(x)| \leq \bar{\lambda}_i \varepsilon(x).$$

La fonction $\varepsilon(x)$ pouvant être choisie arbitrairement proche de 0 le théorème 2 est démontré.

B₃) Appendice.

Etude des différentielles de la fonction X définie sur E à valeurs dans R :

$$X(x) = \varphi\left(\frac{|x|^{2k}}{r^{2k}}\right)$$

où φ est la fonction réelle définie dans A_1 i).

Posons $X_1(x) = \varphi(|x|^{2k})$

$$|D^i X(x)| = |D^i X_1\left(\frac{x}{r}\right)| \times \frac{1}{r^i}.$$

Pour étudier la différentielle d'ordre i de X_1 , nous introduisons les notations suivantes :

Soit β un entier $1 \leq \beta \leq i$ tel que $(i-\beta)$ soit pair. Soit P_β l'ensemble des parties à β éléments de l'ensemble des entiers compris entre 1 et i , noté $[1, i]$. Soit $S \in P_\beta$, soit T le complémentaire de S dans $[1, i]$.

Nous désignons par Σ_T , l'ensemble des permutations d'éléments de T .

Soit τ_T un élément de Σ_T .

Posons $S = (i_1, \dots, i_\beta)$

$$\tau_T = (j_1, \dots, j_\gamma)$$

γ est pair $\beta + \gamma = i$.

Soit $x^{S_I T}$ l'application i -multilinéaire définie par :

$$x^{S_I T}(h_1, \dots, h_i) = (x \cdot h_{i_1}) \times \dots \times (x \cdot h_{i_\beta}) \sum_{\tau \in \Sigma_T} (h_{j_1} \cdot h_{j_2}) \dots (h_{j_{\gamma-1}} \cdot h_{j_\gamma}) .$$

Lemme 1.

La différentielle d'ordre i de la fonction X_1 au point x est de la forme :

$$D^i X_1(x) = \sum_{1 \leq \alpha \leq i} \Delta^{i-\alpha}(x) \varphi^\alpha(|x|^{2k})$$

où $\varphi^\alpha(t)$ est la dérivée d'ordre α de φ au point t .

$$\Delta^{i-\alpha}(x) = \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq i \\ (i-\beta) \text{ pair} \\ (i+\beta) \leq 2k\alpha}} K_\beta^{i,\alpha} |x|^{2(k-1)\alpha-\beta'} \sum_{S \in P_\beta} x^{S_I T} .$$

Dans cette formule, on a posé $\beta' = \beta + i - 2\alpha$ (β' est pair). Σ_T désigne l'ensemble des permutations du complémentaire de S dans $[1, i]$.

$K_\beta^{i,\alpha}$ est une constante indépendante de r .

Démonstration du lemme 1. Elle se fait par récurrence, en appliquant les règles

de calcul suivantes :

$$1^\circ) D(|x|^{2\gamma}) = 2\gamma |x|^{2(\gamma-1)} x^*$$

où x^* est le vecteur dual de x

$$x^*(h) = x \cdot h$$

$$(x^S) \times x^* = x^{S'} \quad \text{où } S' \in P_{\beta+1} .$$

$$2^\circ) D \varphi^\alpha(|x|^{2k}) = |x|^{2(k-1)} x^* \varphi^{\alpha+1}(|x|^{2k}) .$$

$$3^\circ) D(x^S) = \sum_{S' \in P_{\beta-1}(S)} x^{S'} I^{(S-S') \cup \{i_{\beta+1}\}}$$

où $P_{\beta-1}(S)$ désigne l'ensemble des parties à $(\beta-1)$ éléments de S et

$$S' \cup \{i_{\beta+1}\} = S .$$

Lemme 2.

Si S est une partie à β éléments, la norme de l'application i -multilinéaire $x^S I^T$ est majorée par $(i-\beta)! |x|^\beta$.

Corollaire. Il existe une constante K^i telle que :

$$|D^i X_1(x)| < K^i \quad |D^i X(x)| < \frac{K^i}{r^i}.$$

Démonstration. $2k\alpha - (i+\beta) \geq 0$ donc il existe une constante $\bar{K}^{i-\alpha}$ telle que :

$$|\Delta^{i-\alpha}(x)| < \sum_{1 \leq \beta \leq i} \bar{K}^{i-\alpha} |x|^\beta.$$

Or φ est non nul si $0 \leq |x| \leq 1$

$$|D^i X_1(x)| < K^i \quad \text{et} \quad |D^i X(x)| < \frac{K^i}{r^i}.$$

§III. Applications à des problèmes de lissage de fonctions définies sur des variétés.

Dans ce paragraphe M désignera une variété paracompacte, séparable modelée sur E^α (E^α est l'un des espaces ℓ_p , c_0 et admet une norme de classe C^α) N une variété paracompacte, séparable modelée sur F . Si $0 \leq \beta \leq \alpha$, nous désignerons par $\mathcal{C}^\beta(M, N)$ l'ensemble des applications de classe β de M dans N .

Lemme 1.— Soient U, V, Ω , $\exists$ ouverts de E^α tels que :

$$\bar{U} \subset V \subset \bar{V} \subset \Omega$$

Soit f une fonction de classe C^1 définie sur Ω à valeurs dans F .

Quelle que soit la fonction ε continue, strictement positive définie sur Ω ,

il existe une fonction g définie sur Ω , à valeurs dans F telle que :

a) g est de classe C^α sur U .

b) $g = f$ en dehors de V .

c) $\sup_{x \in \Omega} |g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$

d) $\sup_{x \in \Omega} |Dg(x) - Df(x)| < \varepsilon(x)$

(Une fonction vérifiant c) et d) sera dite une ε -approximation de f).

Démonstration du lemme 1 :

D'après [6], il existe une fonction ϕ définie sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\phi^{-1}(0) \supset \Omega - V \quad \phi^{-1}(1) \supset \bar{U}$$

Soit $\varepsilon_1(x)$ une fonction continue strictement positive telle que :

$$0 < \varepsilon_1(x) < \frac{\varepsilon(x)}{2 \sup(1, |D\varphi(x)|)}$$

Nous appliquons le théorème 1 pour la fonction ε_1 . Soit f_1 une fonction de classe C^α telle que :

$$\sup_{x \in \Omega} |f_1(x) - f(x)| < \varepsilon_1(x)$$

$$\sup_{x \in \Omega} |Df_1(x) - Df(x)| < \varepsilon(x)$$

La fonction $g = \psi f_1 + (1 - \psi)f$ est la fonction cherchée.

Théorème 1.— Supposons M et N de classe α $\mathcal{C}^\alpha(M, N)$ est dense dans $\mathcal{C}^1(M, N)$, muni de la C^1 -topologie fine.

Démonstration :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(M, N)$; il existe un atlas dénombrable localement fini de M ; soit $(\Omega_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des cartes de cet atlas. Soit $(W_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des cartes d'un atlas de N tel que le recouvrement par les W_i soit localement fini. Nous pouvons choisir les cartes (Ω_n, X_n) de sorte que pour tout n , il existe i : $f(\Omega_n) \subset W_i$.

D'après [2], il existe des ouverts U_n et V_n ($n \in \mathbb{N}$) tels que :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = M^\alpha \quad \text{et} \quad \bar{U}_n \subset V_n \subset \bar{V}_n \subset \Omega_n$$

Soit ε une fonction continue, définie sur M^α strictement positive.

Appliquant le lemme fondamental, nous définissons par induction une suite de fonctions $\{g_n\}$ telles que :

$$a) \quad g_n = g_{n-1} \quad \text{sur} \quad \Omega_n - V_n .$$

$$b) \quad g_n \quad \text{est de classe} \quad C^\alpha \quad \text{sur} \quad \bigcup_{p \leq n} U_p$$

$$c) \quad g_n \quad \text{est une} \quad 2^{-n} \varepsilon \quad \text{approximation de} \quad g_{n-1} .$$

Posons $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$

g est de classe C^α et est une ε -approximation de f .

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que les immersions et les plongements considérés sont fermés et que l'image par l'application linéaire tangente à f de l'espace tangent à M en un point x est un sous-espace fermé admettant un supplémentaire de l'espace tangent à N en $f(x)$.

Corollaire 1.- L'espace des immersions (respectivement plongements, respectivement difféomorphismes) de M dans N de classe C^α est dense dans l'espace des immersions (respectivement plongements, respectivement difféomorphismes) de M dans N de classe C^1 pour la C^1 -topologie fine.

La même démonstration que celle faite en dimension finie montre que l'ensemble des immersions de classe C^1 de M dans N est ouvert dans $\mathcal{C}^1(M, N)$. Le corollaire 1 est donc une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 2. - Soit f un plongement de M dans N il existe un voisinage $\mathcal{W}_1$ de f dans $\mathcal{E}^1(M, N)$ tel que tout élément g de $\mathcal{W}_1$ soit injectif.

Démonstration :

Soit x un point de M , (Ω_x, X_x) une carte de M au voisinage de x ;
il existe au voisinage de $f(x)$ une carte de N $(W_{f(x)}, \psi_{f(x)})$ telles que $X(\Omega)$ soit homéomorphe à une boule ouverte B de $\mathbb{E}_\alpha$ de centre $\psi \circ f(x)$ $\psi(\Omega)$ soit homéomorphe à $B \times B'$ où B' est une boule ouverte et un espace E'
 $E^\alpha + E' \simeq F$.

Nous pouvons en outre supposer que : $f(\Omega) \subset W_{f(x)}$

et $\psi \circ f \circ X^{-1}(y) = (y, 0)$

Posons : $\Omega'_x = X_x^{-1}(\frac{B}{2})$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $\mathcal{W}_0$ de f tel que, quel que soit $g \in \mathcal{W}_0$, on ait :

$$a) \forall y \in \Omega'_x \quad g(y) \in W_{f(x)}$$

$$b) \psi_{f(x)} \circ g \text{ est un plongement.}$$

Soit d une distance sur N compatible avec la topologie de N ; soit ε une fonction continue strictement positive telle que :

$$\forall y \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon(x) \implies y \in \Omega_x$$

Soit $\mathcal{W}_1 = \{g ; g \in \mathcal{E}^1(M, N) \quad g \text{ est une } \frac{\varepsilon(x)}{2} \text{ approximation de } f\}$

Soit $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \cap \mathcal{W}_1$.

On vérifie que quel que soit $g \in \mathcal{W}$, g est injective.

Lemme 3.- Soit f un difféomorphisme de M sur N , il existe un voisinage $\mathcal{W}_2$ de f dans $\mathcal{E}^1(M, N)$, tel que tout élément g de $\mathcal{W}^1$ soit surjectif.

Les notations étant les mêmes que précédemment, il existe un voisinage $\mathcal{W}'_0$ de f , tel que $\forall g \in \mathcal{W}'_0$ $\phi_{f(x)} \circ g(\Omega'_x)$ contienne une boule ouverte de centre $\phi \circ g(x)$ et de rayon $r(g, x)$. Si $\mathcal{W}'_0$ a été choisi assez petit.

Il existe une fonction continue α telle que :

$$0 < \alpha(x) < \inf_{g \in \mathcal{W}'_0} r(g, x)$$

soit $\mathcal{W}'_1 = \{g ; g \in \mathcal{E}^1(M, N), g \text{ est une } \alpha\text{-approximation de } f\}$. On vérifie que $\mathcal{W}^1 = \mathcal{W}'_0 \cap \mathcal{W}'_1$ est le voisinage cherché.

Théorème 3.- Soit Σ^1 une structure de classe C^1 sur une variété M ; Σ contient une structure Σ^α de classe C^α .

Démonstration :

Elle est calquée sur celle faite en dimension finie [11].

Lemme 4.- Soient U, V, Ω 3 ouverts bornés de E tels que $\bar{U} \subset V \subset \bar{V} \subset \Omega$.

Soit f un plongement de classe C^1 de Ω dans E . Supposons qu'il existe une décomposition de E en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ telle que $\Pi_1 \circ f$

(Π_1 projection sur E_1 parallèlement à E_2) soit un difféomorphisme de classe

C^1 de Ω sur son image Ω' .

Quelle que soit la fonction continue $\varepsilon(x)$, strictement positive, il existe une fonction g telle que :

a) $g(U)$ est une sous-variété de classe C^α de E .

b) $g = f$ sur $\Omega - V$.

c) $\sup_{x \in \Omega} |g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$.

d) $\sup_{x \in \Omega} |Dg(x) - Df(x)| < \varepsilon(x)$.

e) Si $\Omega_1 \subset \Omega$ et si $f(\Omega_1)$ est une sous-variété de classe C^α de E , $g(\Omega_1)$ est une sous-variété de classe C^α de E .

D'après [8], il existe un plongement de classe C^1 de M dans E , la fin de la démonstration du théorème 3 est basée sur le lemme suivant :

Lemme 5. - Soit f un plongement de classe C^1 de M dans E .

Soit $\varepsilon(x)$ une fonction positive définie sur M ; il existe une ε -approximation de f , g de classe C^1 telle que $g(M)$ soit une sous-variété de classe C^α de E .

Remarque :

Supposons que la structure Σ^1 sur M soit une structure "étalée" (layer) de classe C^1 ; [7] il existe un atlas étalé (Ω_i, X_i) sur M , un isomorphisme T de E sur un sous-espace fermé de E tels que : $(f \circ X_i^{-1} - T)(\Omega_i)$ soit con-

tenu dans un sous-espace de dimension finie de E . La construction de g au lemme 5 montre qu'il existe un atlas étalé (Ω'_i, X'_i) sur M tel que

$(g \circ X_i^{-1} - T)(\Omega'_i)$ soit contenu dans un sous-espace de dimension finie de E .

L'image réciproque par g de la structure de $g(N)$ est une structure étalée de classe C^α sur M .

Supposons que E soit un espace de Hilbert, du §I théorème 2, nous déduisons les résultats suivants :

Théorème 4.- Soit M une variété de classe C^∞ modelée sur un espace de Hilbert, l'espace des applications (resp. immersions, resp. plongements, resp. difféomorphismes) de classe C^∞ de M dans une variété N est dense dans l'ensemble des applications (resp. immersions, resp. plongements, resp. difféomorphismes) de classe C^{2k-1} de M dans N , muni de la C^k topologie fine.

Théorème 5.- Soit Σ^{2k-1} une structure de classe C^{2k-1} sur une variété M modelée sur un espace de Hilbert, il existe sur M une structure Σ^∞ de classe C^∞ , C^k compatible avec Σ^{2k-1} .

Corollaire 2.- Toute variété hilbertienne de classe C^{2k-1} est C^k -difféomorphe à un ouvert d'un espace de Hilbert.

Ce corollaire est une conséquence du théorème 5 et de [5].

§III. Approximation de fonctions par des fonctions de Sard.

Soit Ω un ouvert d'un espace de Hilbert E , séparable, de dimension infinie F un espace de Hilbert séparable de dimension finie ou infinie, une application f de Ω dans F est dite de Sard si l'ensemble de ses valeurs critiques est maigre [6].

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1.- L'ensemble des applications de Sard de classe C^∞ de Ω dans F est dense dans l'ensemble des applications de classe C^1 de Ω dans F , muni de la C^1 -topologie fine.

Démonstration :

Soit f une application de classe C^1 de Ω dans F et ε une fonction continue définie sur Ω strictement positive.

Soit $\bar{g}$ la fonction de classe C^∞ définie au §I A_2 : telle que :

$$\sup_{x \in \Omega} | \bar{g}(x) - f(x) | < \bar{\lambda}_0 \varepsilon(x)$$

$$\sup_{x \in \Omega} | D\bar{g}(x) - Df(x) | < \bar{\lambda}_1 \varepsilon(x)$$

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de prouver que la fonction $\bar{g}$ est une fonction de Sard.

Considérons le recouvrement de Ω construit au §I A_2 par des boules B_n de centre a_n et de rayon ρ_n .

Soit x_0 un point de Ω et n le plus petit entier tel que $x_0 \in B_n$.

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq p \leq n} \mu_p(x) [f(a_p) + Df(a_p) \cdot (x - a_p) + \ell_p(x)]$$

$$\mu_p(x) = (1 - \varphi_1(x)) \times \dots \times (1 - \varphi_{n-1}(x))$$

$\ell_p(x)$ est une fonction construite en appliquant le lemme fondamental 1 (§I A₁)

de la manière suivante :

Soit Ψ_n l'application différentiable de E sur E^∞ telle que

$$|x - \Psi_n(x)| < \frac{\rho_n}{2^n}$$

Il existe une boule ouverte $\Omega'(x_0)$ de centre x_0 , contenue dans B_n et un entier m tels que : $\Psi_n(\Omega'(x_0))$ soit contenu dans E_m (E_m espace de dimension finie m). Quel que soit p ($1 \leq p \leq n$) il existe une application de classe $C^\infty \bar{\ell}_{p,m}$ de E_m dans F telle que

$$\ell_p(x) = \bar{\ell}_{p,m}(\Psi_n(x))$$

Soit $\Omega(x_0)$ une boule ouverte de centre x_0 telle que

$$\Omega(x_0) \subset \bar{\Omega}(x_0) \subset \Omega'(x_0) \subset B_n$$

Les boules $\Omega(x_0)$ quand x_0 varie dans Ω formant un recouvrement de Ω :

il existe une famille dénombrable de points $x_i (i \in \mathbb{N})$ telle que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega(x_i) = \Omega$.

Posons $\Omega(x_i) = \Omega_i$ et $\Omega'(x_i) = \Omega'_i$.

Il existe deux entiers α_i et β_i tels que sur Ω'_i :

$$\bar{g}(x) = \sum_{p \leq \alpha_i} \mu_p(x) [f(a_p) + Df(a_p) \cdot (x - a_p) + \bar{\ell}_{p, \beta_i}(\Psi_{\alpha_i}(x))]$$

Nous allons démontrer que le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques

de la restriction de $\bar{g}$ à $\bar{\Omega}_i$ est un ouvert dense. F étant un espace de Baire,

nous en déduirons que la fonction $\bar{g}$ est de Sard.

Désormais nous supposerons l'indice i fixé, les deux entiers α_i et β_i

sont fixés. Pour simplifier les notations nous poserons sur Ω'_i :

$$g(x) = \sum_{p \leq \alpha} \mu_p(x) [f(a_p) + Df(a_p) \cdot (x - a_p) + \ell_p(x)]$$

Avec $\ell_p(x) = \overline{\ell}_p(\Psi_\alpha(x))$ $\Psi_\alpha(x) \in E_m$.

D'après la définition de Ψ_α , les points de $\overline{\Omega}_1$ tels que $(\sum_{n>m} x_n^2)$ soit constant ont même image par Ψ_α .

Soit E' le sous-espace affine de dimension finie engendré par les points a_p ($1 \leq p \leq \alpha$) et E_m . Soit π' la projection orthogonale sur E' ; soit E'' le sous-espace engendré par E' et un vecteur orthogonal à E' , e'' , de norme 1. e'' est choisi colinéaire à $(x_1 - \pi'(x_1))$.

Soit ρ l'application de E sur E'' définie par :

$$\rho(x) = \pi'(x) + |x - \pi'(x)| e''$$

- ρ est une application de classe C^∞ sur $\Omega_1' - (E' \cap \Omega_1')$.

- Soit $S_x = \{x' ; x' \in \Omega_1' \mid \rho(x) = \rho(x')\}$

si x n'est pas situé dans E' , S_x est un ouvert d'une sphère de codimension finie égale à la dimension de E'' ; sur S_x les fonctions $\mu_p(x')$ et $\ell_p(x')$ sont constantes. La restriction de g à S_x coïncide avec la restrictions à S_x d'une application linéaire et est donc de Sard.

- E'' étant de dimension finie, la restriction de g à E'' est de Sard.

- Au voisinage d'un point x non situé dans E' , la structure de E est localement produit : il existe un voisinage U_x de x homéomorphe à $\Sigma_x \times U_x''$ où Σ_x est un voisinage de x dans S_x et U_x'' un voisinage de x dans E'' .

La démonstration du théorème 1 est, pour l'essentiel basée sur les quatre remarques précédentes.

Proposition 1.— Le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de g à $\overline{\Omega}_1$ est ouvert.

Nous démontrons tout d'abord un lemme plus général qui sera utilisé ultérieurement :

Soit G un fermé de Ω'_1 . Nous dirons que G vérifie la propriété R si il existe une boule U_0 de centre ξ_0 contenue dans Ω'_1 telle que

$$(i) \quad G \subset \overline{U}_0 \subset \Omega'_1$$

$$(ii) \quad G = \bigcup_{x \in G} S_x \cap \overline{U}_0$$

Lemme 1.— Soit G un fermé de $\overline{\Omega}'_1$ possédant la propriété R . $g(G)$ est fermé dans F .

Démonstration :

Sans rien changer à la généralité du problème, nous pouvons supposer que ξ_0 est situé dans E'' . Soit y un point de F et supposons qu'il existe une suite de points $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de G telle que la suite $\{g(x_j)\}$ converge vers y .

Montrons qu'il existe un point ξ de G tel que $g(\xi) = y$.

En tout point x de G :

$$g(x) = \sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(\rho(x)) [f(a_p) + Df(a_p) \cdot (x - a_p) + \ell_p(\rho(x))]$$

$$Dg(x) = \sum_{1 \leq p \leq \alpha} D\mu_p(x) [f(a_p) + Df(a_p) \cdot (x - a_p) + \ell_p(\rho(x))]$$

$$+ \sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(\rho(x)) [Df(a_p) + D\ell_p(x)]$$

Considérons la suite $\{\rho(x_j)\}$.

ξ_0 étant situé dans E'' , les points $\rho(x_j)$ appartiennent à $\overline{U}_0$ donc à G

$\rho(\overline{U}_0) = \overline{U}_0 \cap E''$ est compact.

$\rho(G)$ est compact et il existe une suite $\{x_{j_n}\}$ extraite de la suite $\{x_j\}$ telle que la suite $\{\rho(x_{j_n})\}$ converge vers un point ξ'_0 de $\rho(G)$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(\xi'_0) [f(a_p) + Df(a_p) \cdot (x_{j_n} - a_p) + \frac{1}{2} D^2 f(a_p)(x_{j_n} - a_p, x_{j_n} - a_p) + \dots]$$

La suite $\left\{ \sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(\xi'_0) Df(a_p) \cdot (x_{j_n} - \xi'_0) \right\}$ converge.

Soit K le noyau de l'application linéaire : $\left(\sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(\xi'_0) Df(a_p) \right)$.

Soit K' le supplémentaire orthogonal de K et $\pi_{K'}$ la projection orthogonale sur K' .

$$\left(\sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(\xi'_0) Df(a_p) \right) \cdot \pi_{K'}(x - \xi'_0) = \left(\sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(\xi'_0) Df(a_p) \right) \cdot (x - \xi'_0)$$

Soit $\pi_{K'}'$, la projection orthogonale sur l'espace engendré par K' et E' ,

K'' le sous-espace engendré par K' , E' et un vecteur e_1'' orthogonal à K' et E' et colinéaire à $(\xi_0 - \pi_{K'}'(\xi_0))$.

Posons $\rho'(x) = \pi_{K'}'(x) + |(x - \pi_{K'}'(x))| e_1''$

Nous remarquons que si 2 points x et x' vérifient la relation $\rho'(x) = \rho'(x')$, ils vérifient aussi la relation $\rho(x) = \rho(x')$.

La suite $\left\{ \left(\sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(\xi'_0) Df(a_p) \right) \cdot \pi_{K'}'(x_{j_n} - \xi'_0) \right\}$ converge. D'après le théorème du graphe fermé, la suite $\pi_{K'}'(x_{j_n} - \xi'_0)$ est une suite de Cauchy donc converge.

$$\begin{aligned} |x_{j_n} - \xi'_0 - \pi_{K'}'(x_{j_n} - \xi'_0)|^2 &= (x_{j_n} - \xi'_0 - \pi_{K'}'(x_{j_n} - \xi'_0))^2 \\ &\quad + |(\pi_{K'}' - \pi_{K'}')(x_{j_n} - \xi'_0)|^2 \end{aligned}$$

La suite $\{\rho(x_{j_n})\}$ étant convergente, la suite $\rho'(x_{j_n})$ converge vers un point ξ .

$\overline{U}_0$ étant une boule fermée, $\rho'(\overline{U}_0)$ est un fermé borné contenu dans $\overline{U}_0$ et

$$\rho'(G) \subset \rho(G) \cap \overline{U}_0$$

$$\rho'(G) \subset G$$

Le point ξ est un point de G et on vérifie que $g(\xi) = g$.

Fin de la démonstration de la proposition 1.

Soit $\{x_j\}$ une suite de points critiques de $\overline{\Omega}_1$ tels que :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g(x_j) = y$$

Montrons que y est point critique de la restriction de g si $\overline{\Omega}_1$.

La construction du lemme précédent montre qu'il existe un point ξ de $\overline{\Omega}_1$ tel que $g(\xi) = y$. Soit h un vecteur de E , fixé, de norme 1.

Pour tout entier j_n , il existe un vecteur h'_{j_n} de norme 1 tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Dg(x_{j_n}) \cdot h = \lim_{n \rightarrow \infty} Dg(\rho'(x_{j_n})) \cdot h'_{j_n}$$

(Pour chaque indice j_n , il existe une isométrie laissant invariants les points de $K' + E'$ et transformant x_{j_n} en $\rho'(x_{j_n})$, h'_{j_n} est le transformé de h par cette isométrie) et réciproquement, h' étant fixé, de norme 1, il existe pour tout entier j_n un vecteur h_{j_n} de norme 1 tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Dg(x_{j_n}) \cdot h_{j_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} Dg(\rho'(x_{j_n})) \cdot h'$$

L'espace image de $Dg(\xi)$ est limite des espaces images de $Dg(\rho'(x_{j_n}))$, donc des espaces images de $Dg(x_{j_n})$. D'après [4], si $Dg(\xi)$ était une application linéaire surjective, il existerait un entier N tel que, quel que soit $n > N$

$Dg(x_{j_n})$ soit surjective ; d'où une contradiction.

ξ est point critique et y est valeur critique.

Proposition 2.- Le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de g à $\overline{\Omega}_1$ est dense.

Nous démontrons une suite de lemmes.

Lemme 2.- La proposition 2 est vraie dans le cas où F est de dimension finie.

Démonstration du lemme 2:

Le noyau de l'application linéaire $Df(a_p)$ est de codimension finie quel que soit p $1 \leq p \leq \alpha$. Il existe un sous-espace K_α de dimension finie orthogonal à $\bigcap_{1 \leq p \leq \alpha} \text{Ker } Df(a_p)$. Soit K'_α l'espace affine de dimension finie engendré par K'_α , les points a_p ($1 \leq p \leq \alpha$) et E_m . Soit $\pi_{K'_\alpha}$ la projection sur K'_α .

Soit K''_α l'espace engendré par K'_α est un vecteur e''_α orthogonal à K'_α , colinéaire à $(x_i - \pi_{K'_\alpha}(x_i))$, de norme 1.

Nous construisons, de même que précédemment une application ρ_α de E sur

K''_α :

$$\rho_\alpha(x) = \pi_{K'_\alpha}(x) + |(x - \pi_{K'_\alpha}(x))| e''_\alpha.$$

quel que soit x

$$g(\rho_\alpha(x)) = g(x)$$

- Supposons que x ne soit pas situé dans K'_α .

$$Dg(\rho_\alpha(x)) \times D\rho_\alpha(x) = Dg(x)$$

L'application $D\rho_\alpha(x)$ est surjective.

L'ensemble des valeurs critiques de la restriction de g à $\overline{\Omega}_1 - (K'_\alpha \cap \overline{\Omega}_1)$ est

l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de g à $(\overline{\Omega}_1 - (K'_\alpha \cap \overline{\Omega}_1)) \cap K''_\alpha$.

D'après le théorème de Sard connu en dimension finie, cet ensemble est de mesure nulle.

- Supposons que x soit situé dans K'_α

quel que soit l'élément h de E :

$$Dg(x) \cdot h = Dg(x) \cdot \pi_{K'_\alpha}(h) .$$

L'ensemble des valeurs critiques images d'un point de $K'_\alpha \cap \overline{\Omega}_i$ est l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de g à $K'_\alpha \cap \overline{\Omega}_i$. L'ensemble des valeurs critiques, images de points critiques situés dans K'_α est de mesure nulle.

La réunion de 2 ensembles de mesure nulle est de mesure nulle et le lemme 1 est démontré.

Cas général où F est de dimension infinie.

Considérons l'application μ de E dans $\mathbb{R}^\alpha$ définie par

$$\mu(x) = (\mu_p(x)) \quad 1 \leq p \leq \alpha$$

$\mu(x)$ est un point de l'hyperplan H^α de $\mathbb{R}^\alpha$ d'équation

$$\sum_{1 \leq p \leq \alpha} \lambda_p = 1$$

Soit M_1 l'ensemble des points x de Ω'_i tels que le noyau de l'application linéaire.

$(\sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(x) Df(a_p))$ soit de dimension infinie.

Soit M_2 le complémentaire de M_1 dans l'ensemble des points critiques de

Ω'_i . M_2 est ouvert dans cet ensemble, M_1 est fermé.

Lemme 3.- Le complémentaire dans F de $g(M_1 \cap \overline{\Omega}_1)$ est un ouvert dense.

Soit $\{L_p\}$ ($1 \leq p \leq \alpha$) une famille de p éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.

Soit G_α l'application de H^α dans $\mathcal{L}(E, F)$ définie par :

$$G_\alpha(\lambda) = \sum_{1 \leq p \leq \alpha} \lambda_p L_p.$$

(λ_p est la première composante de λ).

Soit Λ_1 l'ensemble des points λ de H^α tel que le conoyau de $G_\alpha(\lambda)$ soit de dimension infinie.

Soit λ_0 un élément de Λ_1 .

Sous lemme : il existe un voisinage X_0 de λ_0 dans H_α et un sous-espace

F_0 de F de dimension infinie, tels que, quel que soit λ élément de $X_0 \cap \Lambda_1$,

$$\text{Image} \left(\sum_{1 \leq p \leq \alpha} \lambda_p L_p \right) \cap F_0 = \{0\}.$$

Démonstration :

Nous la faisons par récurrence sur la dimension de $\mathbb{R}^\alpha$.

Si $\alpha = 1$ H^1 est réduit à 1 point et le lemme est vrai : Supposons le lemme vrai pour des espaces de Hilbert E et F quelconques, des applications L_p arbitraires, quel que soit $\beta < \alpha$

Soit E_0 le noyau de $G(\lambda_0)$

E_1 un sous-espace supplémentaire de E_0

$$F_1 = G(\lambda_0)(E_1)$$

$\overline{F}_0$ un sous-espace supplémentaire de F_1 .

Soit π la projection sur $\overline{F}_0$ parallèlement à F_1 .

Soit X un voisinage de λ_0 dans H^α tel que quel que soit λ dans X , la restriction de $G(\lambda)$ à E_1 soit injective.

Pour tout λ de X , soit $G_0(\lambda)$ la restriction à E_0 de l'application $\bar{\Pi} \circ G(\lambda)$. $G_0(\lambda_0) = 0$. Pour que le conoyau de $G(\lambda)$ soit de dimension infinie, il faut et il suffit que le conoyau de $G_0(\lambda)$ soit de dimension infinie.

Soit $L_{0,p}$ la restriction de L_p à E_0

$$\sum_{1 \leq p \leq \alpha} \lambda_{0,p} L_{0,p} = G_0(\lambda_0) = 0$$

$(\lambda_{0,p}$ est la première composante de λ_0).

un des $\lambda_{0,p}$ au moins n'est pas nul, supposons que ce soit $\lambda_{0,\alpha}$

$$L_{0\alpha} = - \sum_{1 \leq p \leq \alpha-1} \frac{\lambda_{0,p} L_{0,p}}{\lambda_{0,\alpha}}$$

$$G_0(\lambda) = \sum_{1 \leq p \leq \alpha-1} \left(\lambda_p - \frac{\lambda_{0,p}}{\lambda_{0,\alpha}} \lambda_\alpha \right) L_{0,p}$$

$$\sum_{1 \leq p \leq \alpha-1} \left(\lambda_p - \frac{\lambda_{0,p} \lambda_\alpha}{\lambda_{0,\alpha}} \right) = 1 - \frac{1}{\lambda_{0,\alpha}}$$

- Si $\lambda_{0,\alpha} \neq 1$ le point de $p^{\text{ième}}$ composante

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_{0,\alpha}}\right)^{-1} \left(\lambda_p - \frac{\lambda_{0,p}}{\lambda_{0,\alpha}} \lambda_\alpha \right) \text{ est dans } H^{\alpha-1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le sous lemme est démontré dans ce cas.

- Si $\lambda_{0,\alpha} = 1$

ou bien $\lambda_{p,\alpha} = 0 \quad \forall p < \alpha$

$$\text{ou bien } L_{0,\alpha} = 0 \quad \sum_{1 \leq p \leq \alpha} \lambda_p L_{0,p} = \sum_{1 \leq p \leq \alpha-1} \lambda_p L_{0,p}$$

nous pouvons encore dans chacun des deux cas appliquer l'hypothèse de récurrence.

Fin de la démonstration du lemme 2.

Soit x_0 un point de M_1 , $\mu(x_0) = \lambda_0$

Soit V_0 une boule ouverte de centre x_0 contenue dans $\mu^{-1}(X_0)$ (X_0 ouvert défini dans le sous-lemme). Il existe un sous-espace F_0 de F tel que, quel que soit x dans $V_0 \cap M_1$

$$(\text{Image } \sum_{1 \leq p \leq \alpha} \mu_p(x) Df(a_p)) \cap F_0 = \{0\}.$$

Considérons d'autre part pour tout point x non situé dans E' la sphère S_x de codimension finie dans E , passant par x

$$S_x = \{x' ; \Pi'(x') = \Pi'(x) \text{ et } |x' - \Pi'(x')| = |x - \Pi'(x)|\}$$

sur chaque S_x les applications $\mu_p(x)$ et $\ell_p(x)$ sont constantes et la restriction à S_x de g est la restriction d'une application linéaire. D'autre part

si x est situé dans M_1 tous les points de $S_x \cap \Omega'_i$ sont situés dans M_1

$M_1 \cap \bar{V}_0$ est un fermé possédant la propriété R .

Soit F'_0 un sous-espace supplémentaire de F_0 .

Comme espace affine, F est engendré par les sous-espaces affines $\{y\} \times F_0$

où y décrit l'ensemble des points de l'espace affine parallèle à F'_0 passant

par $g(x_0) = y_0$

Soit $y = y_1$ fixé,

Pour chaque x de M_1 , considérons :

$$g(S_x \cap \Omega'_1) \cap \{y_1\} \times F_0$$

L'image de l'application linéaire dont la restriction à S_x coïncide avec g est un sous-espace contenu dans un supplémentaire de $\{y_1\} \times F_0$, donc coupe $\{y_1\} \times F_0$ en au plus 1 point.

$g(S_x \cap \Omega'_1) \cap \{y_1\} \times F_0$ est vide ou réduit à un point pour tout x de M_1 .

Le point x_0 n'étant pas situé dans E' , au voisinage de x_0 la structure de E est localement produit : V_0 contient un voisinage de x_0 homéomorphe à $\Sigma \times \Sigma'$, où Σ est un voisinage de x_0 dans S_{x_0} et Σ' un voisinage de x_0 dans l'espace de dimension finie engendré par E' et x_0 .

Nous supposons Σ' compact. L'ensemble des points x de Σ' tels que

$g(\Sigma \times \{x\}) \cap \{y_1\} \times F_0 \neq \emptyset$ est un compact Σ'_1 de Σ' .

$g(\Sigma \times \Sigma'_1) \cap \{y_1\} \times F_0$ est un compact quel que soit y_1 . Or F_0 est de dimension infinie : le complémentaire dans $\{y_1\} \times F_0$ de $g(\Sigma \times \Sigma'_1) \cap \{y_1\} \times F_0$ est un ouvert dense. Donc tout point x de M_1 , non situé dans E' admet un voisinage V_x tel que le complémentaire de $g(\overline{V_x} \cap M_1)$ soit dense. $\overline{V_x} \cap M_1$ vérifiant la propriété R , d'après le lemme 1 de la proposition 1 $g(\overline{V_x} \cap M_1)$ est fermé.

Il existe une famille dénombrable d'ouverts V_n tels que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\overline{V_n} \cap M_1) = (\Omega'_1 - E') \cap M_1$$

D'après la propriété de Baire, le complémentaire de $g(\Omega'_1 - E') \cap M_1$ est dense.

D'autre part $g(\overline{\Omega}_1 \cap E')$ est compact, son complémentaire est un ouvert dense.

Le complémentaire de $g(\overline{\Omega}_1 \cap M_1)$ est dense.

Lemme 4.- Le complémentaire dans F de $g(M_2 \cap \bar{\Omega}_1)$ est dense.

D'après la propriété de Baire et tout point admettant une base de voisinages fermés dont l'image dans F est fermée (voisinages vérifiant la propriété R), il suffit de montrer que tout point x de M_2 admet un voisinage $W(x)$ tel que le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de g à $W(x)$ soit dense.

Soit x_0 un point de M_2 , E_0 le noyau de $Dg(x_0)$, E_1 un sous-espace de E supplémentaire de E_0 . Nous identifions E_0 et E_1 avec les sous-espaces affines de E , d'origine x_0 , qui leur sont parallèles.

Soit $F_1 = Dg(x_0)(E_1)$

$\bar{F}_0$ un sous-espace supplémentaire de F_1 . F_0 est de dimension finie.

Soit $\bar{\Pi}$ la projection sur $\bar{F}_0$ parallèlement à F_1 .

L'application $\bar{\Pi} \circ g = \bar{g}$ est une application de E dans $\bar{F}_0$ du type étudié du lemme 2. Nous pouvons donc définir un sous-espace K'_α de E (engendré par E' et le sous-espace orthogonal à l'intersection des noyaux de $\bar{\Pi} \circ Df(a_p)$ ($1 \leq p \leq \alpha$)) de dimension finie et K''_α sous-espace engendré par K'_α et un vecteur e''_α orthogonal à K'_α . Soit ρ_α l'application définie précédemment de E dans K''_α , de classe C^∞ sur $E - K'_\alpha$.

a) Supposons x_0 non situé dans K'_α .

Le noyau de $D\rho_\alpha(x)$ est le sous-espace orthogonal à K'_α et à $(x - \Pi_{K'_\alpha}(x))$. ($\Pi_{K'_\alpha}$ projection orthogonale sur K'_α).

Ce noyau est de codimension finie.

Il existe un sous-espace E'_0 supplémentaire de E_1 tel que la codimension dans E de $(E'_0 + \ker D\rho_\alpha(x_0))$ soit minimum.

(si dimension $E_0 \geq$ codimension $\ker D\rho_\alpha(x_0)$ $E'_0 + \ker D\rho_\alpha(x_0) = E$).

quel que soit x voisin de x_0 , $\ker(D\rho_\alpha(x))$ est isomorphe à $\ker D\rho_\alpha(x_0)$ et les deux sous-espaces sont voisins. Il existe un voisinage W'_0 de x_0 tel que, quel que soit x dans W'_0 , dimension $(E'_0 + \ker D\rho_\alpha(x)) =$ dimension $(E'_0 + \ker D\rho_\alpha(x_0))$. Donc sur W'_0 la codimension de $E'_0 \cap \ker(D\rho_\alpha(x))$ dans E'_0 est constante [4].

Il existe une application linéaire inversible δ de E dans E

$\delta : E'_0 \times E_1 \rightarrow E_0 \times E_1$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} \delta_0 & 0 \\ \delta_1 & \text{Id}_{E_1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \delta_0 \text{ est un isomorphisme de } E'_0 \text{ sur } E_0 \\ \delta_1 \text{ est une application de } E'_0 \text{ dans } E_1 \end{array}$$

Identifions F avec $\bar{F}_0 \times F_1$, E avec $E_0 \times E_1$.

Soit (ξ, ξ') un point de $\bar{E}_0 \times E_1$. Suivant une démonstration de [1], posons

$$g(\xi, \xi') = (\alpha(\xi, \xi'), \beta(\xi, \xi'))$$

Posons $\gamma(\xi, \xi') = (\xi, X^{-1} \circ \beta(\xi, \xi'))$

où X est la restriction de $Dg(0,0)$ à E_1 .

γ est une application inversible et il existe une application η de E dans

$\bar{F}_0$ telle que :

$$g \circ \gamma^{-1}(\xi, \xi') = (\eta(\xi, \xi'), X(\xi'))$$

Nous remarquons d'autre part que :

$$Dg \circ \gamma^{-1}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$D\gamma(0,0) = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

Au voisinage de $0 \in \gamma^{-1}(E_0 \times \{\xi'_0\})$ est une sous-variété de E dont l'espace tangent en tout point voisin de 0 est voisin de E_0 . (ξ'_0 est un point de E_1 proche de 0). Considérons l'application $g \circ \gamma^{-1} \circ \delta^{-1}$.

Il existe une application η_1 de $E = E'_0 \times E_1$ dans $\overline{F}_0$ telle que :

$$g \circ \gamma^{-1} \circ \delta^{-1}(\xi, \xi') = (\eta_1(\xi, \xi'), X(\xi'))$$

$$D(\gamma^{-1} \circ \delta^{-1})(0,0) = \begin{pmatrix} \delta_0^{-1} & 0 \\ -\delta_1 \delta_0^{-1} & \text{Id} \end{pmatrix}$$

L'image par $\gamma^{-1} \circ \delta^{-1}$ de la sous-variété $E_0 \times \{\xi'_0\}$ (ξ'_0 proche de 0) est une sous-variété dont l'espace tangent en tout point voisin de $(\gamma^{-1} \circ \delta^{-1}(0, \xi'_0))$ est voisin de E'_0 .

Il existe un voisinage W_0 de x_0 ($W_0 \subset W'_0$) tel que quel que soit $x = (\xi, \xi')$

dans W_0 la codimension de $[D(\gamma^{-1} \circ \delta^{-1})(x)(E_0) \cap \text{Ker } D\rho_\alpha(x)]$ dans

$D(\gamma^{-1} \circ \delta^{-1})(x)(E_0)$ soit égale à la codimension de $D(\gamma^{-1} \circ \delta^{-1})(x_0)(E_0) \cap \text{Ker } D\rho_\alpha(x_0)$.

L'image par ρ_α de $(\gamma^{-1} \circ \delta^{-1})(E_0 \times \{\xi'_0\} \cap W_0)$ est une sous-variété de K''_α .

Considérons la restriction à $E_0 \times \{\xi'_0\}$ de $\bar{\Pi} \circ g$ soit $\bar{g}_{\xi'_0}$, cette application.

L'image par ρ_α d'un point critique de $\bar{g}_{\xi'_0}$ est un point critique de $g_{\xi'_0}$,

d'après un raisonnement fait pour démontrer la proposition 1.

Or $\rho_\alpha(E_0 \times \{\xi'_0\})$ est une sous-variété de K''_α de dimension finie. L'ensemble

des valeurs critique de $\bar{g}_{\zeta}$, est de mesure nulle dans $\bar{F}_0$.

Or F est engendré par les sous-espaces $\bar{F}_0 \times \{\zeta'\}$ où ζ' est un point de F_1 identifié avec $X(\zeta')$. Le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de g à W_0 est dense.

b) Supposons x_0 situé dans K'_α .

Le même raisonnement que celui fait de la démonstration du lemme 2 montre que si x_0 est un point critique de $\bar{\Pi} \circ g$, x_0 est point critique de la restriction de $\bar{\Pi} \circ g$ à K'_α . L'image par $\bar{\Pi} \circ g$ de l'ensemble des points critiques de K'_α est de mesure nulle dans $\bar{F}_0$ et l'image par g de l'ensemble des points critiques de $K'_\alpha \cap \bar{\Omega}_1$ est un compact de F . Son complémentaire est un ouvert dense.

Le complémentaire dans F de $g(M_2 \cap \bar{\Omega}_1)$ est l'intersection d'un ensemble dense et d'un ouvert dense, est donc dense.

Théorème 2.- Soient M et N deux variétés paracompactes séparables, de classe C^∞ modelées respectivement sur les espaces de Hilbert E et F . Soit N_1 une sous-variété de N . L'ensemble des applications de classe C^∞ de M dans N transversales à N_1 est dense dans $\mathcal{C}^1(M, N)$ muni de la C^1 -topologie fine.

Le théorème 2 se déduit du théorème 1 suivant une méthode classique [6] et [10].

Soit Ω un ouvert de E .

Lemme 1. - L'ensemble des applications de classe C^∞ de Ω dans F transversales à $\{0\}$ est dense dans $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ muni de la C^1 topologie fine.

Démonstration :

Soit ε une fonction continue définie sur Ω , à valeurs dans R , strictement, positive. Appliquons la méthode de construction du §I A₂. Nous définissons un recouvrement de Ω par des boules $B_n(a_n, \rho_n)$

$$\text{Posons } \varepsilon'_n = \frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{\varepsilon(a_n)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } \alpha_n = & \varphi_1 \varepsilon'_1 \rho_1 + \varphi_2 (1 - \varphi_1) \frac{\varepsilon'_2}{2} \rho_2 + \dots + \\ & + \varphi_n (1 - \varphi_{n-1}) \dots (1 - \varphi_1) \frac{\varepsilon'_n \rho_n}{2^n} \end{aligned}$$

$$\text{Posons } \alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x)$$

on vérifie que $0 < \alpha(x) < \varepsilon(x)$

et $|D\alpha(x)| < \varepsilon(x)$

en particulier $|D\alpha(x)|$ est borné.

f étant une application de Ω dans F posons : $f_1 = \frac{f}{\alpha}$

Appliquons à la fonction f_1 le théorème 1 du §III, il existe une fonction g_1 de classe C^∞ telle que :

$$|f_1(x) - g_1(x)| < 1$$

$$|Df_1(x) - Dg_1(x)| < 1$$

et g_1 est une fonction de Sard.

L'ensemble des valeurs critiques de g_1 est maigre : il existe un point b de F $|b| < 1$, tel que b n'appartienne pas à l'ensemble des valeurs critiques de g_1 .

Posons $g_2(x) = g_1(x) - b$.

0 est une valeur régulière de g_2

Posons $g(x) = \alpha(x) g_2(x)$

$$g_2^{-1}(0) = g_1^{-1}(0)$$

$$Dg(x) = D\alpha(x) g_2(x) + \alpha(x) Dg_2(x)$$

En un point x_0 tel que $g(x_0) = g_2(x_0) = 0$

$$Dg(x_0) = \alpha(x_0) Dg_2(x_0)$$

0 est valeur régulière de g

$$|f(x) - g(x)| = |f_1(x) \alpha(x) - g_2(x) \alpha(x)|$$

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x) |f_1(x) - g_2(x)|$$

$$< 2\varepsilon(x)$$

$$Df(x) - Dg(x) = \alpha(x) [Df_1(x) - Dg_2(x)]$$

$$+ D\alpha(x) [f_1(x) - g_2(x)]$$

$$|Df(x) - Dg(x)| \leq 3\varepsilon(x).$$

Lemme 2.- Soit F_0 un sous-espace fermé de F . L'ensemble des applications de classe C^∞ de Ω dans F transversales à F_0 est dense dans $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ pour la C^1 topologie fine.

Démonstration :

Soit F_1 un sous-espace supplémentaire de F_0 Π la projection sur F_1 parallèlement à F_0 . Appliquons à $\Pi \circ f$ le lemme 1, soit g une C^1 -approximation de $\Pi \circ f$ transversale à 0 l'application $(1 - \Pi) \circ f + g$ est une C^1 -approximation de f transversale à F_0 .

Fin de la démonstration du théorème 2.

Soit $\varepsilon(x)$ une fonction strictement positive définie sur M , f une application de M dans N considérons un recouvrement dénombrable localement fini de N par des ouverts (W_j) . Soit ϕ_j un homéomorphisme de W_j sur un ouvert de F

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &< \varepsilon(x) |f_1(x) - g_2(x)| \\ &< 2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Df(x) - Dg(x)| &= \alpha(x) [Df_1(x) - Dg_2(x)] \\ &\quad + D\alpha(x) [f_1(x) - g_2(x)] \end{aligned}$$

$$|Df(x) - Dg(x)| \leq 3\varepsilon(x).$$

Lemme 2.- Soit F_0 un sous-espace fermé de F . L'ensemble des applications de classe C^∞ de Ω dans F transversales à F_0 est dense dans $\mathcal{V}(\Omega, F)$ pour la C^1 -topologie fine.

Démonstration :

Soit F_1 un sous-espace supplémentaire de F_0 Π la projection sur F_1

parallèlement à F_0 .

Appliquons à $\Pi \circ f$ le lemme 1, soit g une C^1 -approximation de $\Pi \circ f$ transversale à 0 .

L'application $(1 - \Pi) \circ f + g$ est une C^1 approximation de f transversale à F_0 .

Lemme 3.— Soit K un fermé de Ω et f une application de Ω dans F de classe C^∞ telle que la restriction de f à K soit transversale à F_0 .

Quelle que soit ε fonction continue strictement positive il existe une application de classe C^∞ , transversale à F_0 telle que :

a) g coïncide avec f sur K

b) $|g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$

c) $|Dg(x) - Df(x)| < \varepsilon(x)$

Démonstration :

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts tels que :

(i) $K \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$

(ii) la restriction de f à $\overline{\Omega}_2$ est transversale à F_0 .

Il existe un voisinage de $f\mathcal{W}$ dans $b^1(\Omega, F)$ pour la C^1 -topologie fine tel que la restriction à Ω_2 de toute fonction g de $\mathcal{W}$ soit transversale à F_0 . Nous pouvons supposer $\mathcal{W}$ localement convexe. D'après [6] il existe une fonction φ de classe C^∞ telle que :

$$K \subset \varphi^{-1}(1) \quad \text{et} \quad \Omega_2 \subset \varphi^{-1}(0)$$

D'après le lemme 2 il existe une application g transversale à F_0 , située dans $\mathcal{W}$ telle que :

$$2 |g(x) - f(x)| < \inf(\varepsilon(x), \frac{\varepsilon(x)}{|D\varphi(x)|})$$

$$2 |Dg(x) - Df(x)| < \varepsilon(x)$$

La fonction $\varphi f + (1 - \varphi)g$ est la fonction cherchée.

Fin de la démonstration du théorème :

Elle se fait par induction, en construisant grâce au lemme 3 la fonction g successivement dans chaque carte d'un atlas de M [6] .

-:-:-:-

-:-

Bibliographie.

-:-

- [1] R. ABRAHAM and J. ROBBIN - Transversal mappings and flows - (Benjamin).
- [2] R. BONIC and J. FRAMPTON - Smooth functions on Banach manifolds. Journal of Mathematics and Mechanics 15 (1966) p.877-895.
- [3] N..BOURBAKI - Topologie générale - chapitre IX.
- [4] A. DOUADY - Le problème des modules sur les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Annals Institut Fourier - Grenoble 16-1 (1966) p.1-95.
- [5] J. EELLS and K.D. ELWORTHY - Open embeddings on certain Banach manifolds. A paraître aux Annals of Mathematics.
- [6] J. EELLS and MAC-ALPIN - An approximate Morse-Sard theorem - Journal of Mathematics and Mechanics 17 (1967) p.1055-1064.
- [7] K.D. ELWORTHY - Frodholm maps and $GL_c(E)$ structures Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968) p.582-586.
- [8] N.H. KUIPER and B. TERPSTRA - Differentiable closed embeddings of Banach manifolds - ~~Conference~~ in honor of G. de Rham Springer Verlag (1970)118-125.
- [9] N.H. KUIPER and D. BURGHELEA - Hilbert manifolds - Annals of Mathematics - vol.90, n°3 p.379-417.
- [10] C. MORLET - Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement. Séminaire H. CARTAN 14, 1961-1962 exposés 4-7.
- [11] J.R. MUNKREES - Elementary differential topology - Annals of Mathematics Studies n°54 (1963).

- [12] F. QUINN - Transversal approximation in Banach manifolds - A paraître aux
"Proccedings Summer institute in Global Analysis" - Berkeley 1968.
- [13] S. SMALE - An infinite dimensional version in Sard's theorem -
American Journal of Mathematics 87 (1965) p.861-866.
- [14] J. WELLS - Differentiable functions in c_0 .
Bulletin Amer. Math. Soc.75 (1969) p.117-118.

-:-:-:-

-:-

MATHEMATICS

SUR LES VARIETES HILBERTIENNES ET LES FONCTIONS
NON DEGENEREEES

PAR

NICOLE MOULIS

(Communicated by Prof. N. H. KUIPER at the meeting of June 29, 1968)

§ 1. *Introduction*

Dans toute cette étude H désignera un espace de Hilbert séparable et de dimension infinie.

Ce papier comporte deux parties distinctes.

(A) § 2. Soit M une variété Hilbertienne sur H avec métrique Riemannienne complète, f une application de classe C^∞ de M dans $\mathbb{R}$.

f sera appelée une m -fonction sur M si f est une fonction de Morse sur M et f vérifie la condition C de Palais-Smale.

(De toute suite $\{x_n\}$ de points de M telle que la suite $\{f(x_n)\}$ soit bornée et telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } f(x_n) = 0$; on peut extraire une suite qui converge vers un point critique.)

Dans [7] N. H. KUIPER et D. BURGHELEA ont démontré que, si il existe sur M une m -fonction, M est difféomorphe à un ouvert d'un espace de Hilbert.

Nous démontrons ici la réciproque.

Théorème A: *Il existe sur tout ouvert Ω de H une m -fonction.*

Nous construisons explicitement cette fonction à l'aide des méthodes utilisées par EELLS et MAC ALPIN dans [5].¹⁾

(B) § 3–6. Dans cette partie, nous donnons quelques généralisations du théorème de BESSAGA [2] et [7].

Nous démontrons les théorèmes suivants.

Théorème B₁: *Soit K un sous ensemble compact d'un espace de Hilbert H , H est difféomorphe à $H - K$.*

Théorème B₂: *Soit K un compact d'un espace de Hilbert H . Soit V un voisinage de K , il existe un difféomorphisme de $H - K$ sur H qui laisse fixes les points situés en dehors de V .*

¹⁾ Dans une première version, j'avais omis le lemme 5 qui est du à N. H. Kuiper, C. G. Atkin et K. D. Elworthy ont aussi complété la démonstration du théorème A.

Théorème B₃: Soit L un sous ensemble localement compact, fermé de H , H est difféomorphe à $H-L$.

Théorème B₄: Soit L un sous ensemble localement compact, fermé de H , V un voisinage de L dans H , V est difféomorphe à $V-L$.

Les méthodes utilisées pour ces démonstrations et les notations sont celles de [7]. K étant un sous ensemble compact de H , on remarque que le raisonnement de [7] peut s'appliquer en remplaçant la fonction distance à un point par la fonction distance au compact. La fonction distance au compact étant seulement continue, on obtient un homéomorphisme de H sur $H-K$. Nous construirons donc une approximation $h(x)$ de classe C^∞ de la fonction $d(x, K)$, dont le vecteur gradient soit majoré. A cette fonction nous appliquerons les méthodes de [7].

§ 2. Existence d'une m -fonction sur un ouvert de H .

Nous démontrons le théorème A.

Soit Ω un ouvert de H . Considérons un recouvrement dénombrable de Ω par des boules fermées U_n (intérieur U_n) de centre a_n et de rayon ρ_n , tel que les points a_n soient linéairement indépendants (n entier positif).

Désignons par $U_{j,i}^c$ l'ensemble des éléments de Ω dont la distance au complémentaire U_j^c de U_j est inférieure à $\frac{\rho_j}{i}$.

Posons $V_n = U_n \cap U_{1,n}^c \cap U_{2,n}^c \cap \dots \cap U_{n-1,n}^c$.

Les ouverts V_n forment un recouvrement localement fini de Ω .

Considérons, d'autre part, les fonctions suivantes de classe C^∞ :

$$\alpha_0(t) = \begin{cases} \exp \frac{1}{t^2-1} & -1 < t < 1 \\ 0 & t < -1 \text{ et } t > 1. \end{cases}$$

Posons

$$\alpha(u) = \frac{1}{c} \int_0^u \alpha_0(t) dt, \quad c = \int_0^1 \alpha_0(t) dt; \quad \alpha_n(u) = \frac{1}{c} \int_{k_n}^u \alpha_0(t) dt; \quad k_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$\gamma_n(u)$ vérifiant les propriétés suivantes:

- a) $\gamma_n(u)$ est de classe C^∞
- b) $\gamma_n(u) = 0$ si $u < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$
- c) $0 < \gamma'_n(u) < \alpha'_n(u)$
- d) $\gamma'_n(u) = \alpha'_n(u)$ si $u > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2$.

x étant un point quelconque de Ω , posons:

$$r_{nn}(|x - a_n|^2) = 3^{-3} [1 - \alpha(|x - a_n|^2 / \rho_n^2)]$$

$$r_{np}(|x - a_p|^2) = \gamma_n[|x - a_p|^2 / \rho_p^2]$$

Posons $f_n(x) = r_{n1}(|x - a_1|^2) \times \dots \times r_{nn}(|x - a_n|^2)$

Le support de f_n est l'adhérence de V_n

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

La fonction $f_n(x)$ s'annule en dehors de V_n ; le recouvrement par les ouverts V_n étant localement fini, f est bien définie.

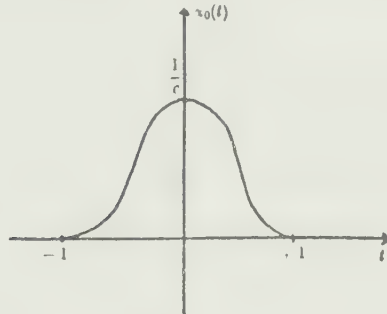


Fig. 1.

Lemme 1: L'ensemble des points critiques de f est localement compact.

Soit x_0 un point de Ω , il existe un voisinage de x_0 , $W(x_0)$ dans Ω qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_n :

$$V_{i_1}, \dots, V_{i_n}.$$

Dans $W(x_0)$ $f(x) = f_{i_1}(x) + \dots + f_{i_n}(x)$.

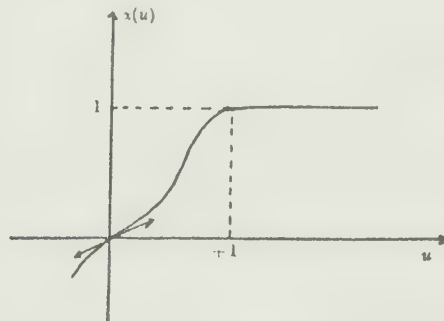


Fig. 2.

Il existe des fonctions $\alpha_{i_p}(x)$ sans zéro commun définies sur $W(x_0)$ telles que:

$$\text{grad } f(x) = \sum_{1 \leq p \leq n} \alpha_{i_p}(x)(x - a_{i_p}).$$

Les points a_{i_p} étant linéairement indépendants l'ensemble des points critiques de $W(x_0)$ est contenu dans $W(x_0) \cap M_0$ où M_0 est le sous-espace affine engendré par les a_{i_p} ($1 \leq p \leq n$).

Lemme 2: En un point critique de $W(x_0)$, le noyau de D^2f est contenu dans M_0 .

Soit x un point de $W(x_0)$. Soit y la projection orthogonale de x sur M_0 . Soit N_0 le sous-espace affine orthogonal à M_0 et passant par x_0 . Prenons comme origine la projection y_0 de x_0 sur M_0 .

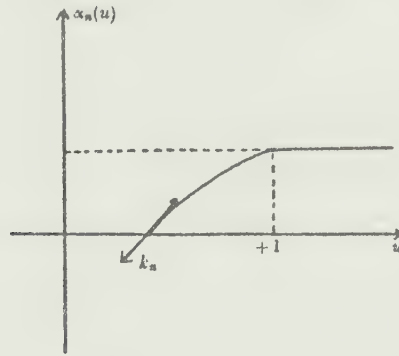


Fig. 3.

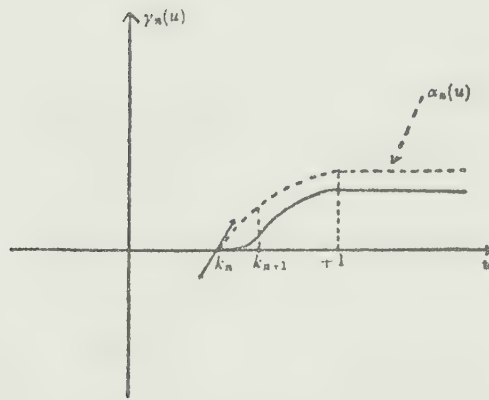
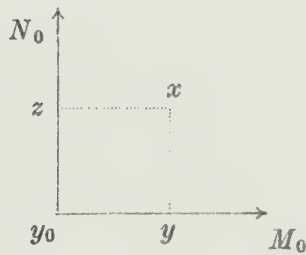


Fig. 4.

Posons $x - y = z$. Dans $W(x_0)$ f ne dépend que de y et de $|z|^2$.

$f(x) = \tilde{f}(y, |z|^2)$ où $\tilde{f}(u_1, u_2)$ est une fonction de $M_0 \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. En un point critique:

$$z = 0 \text{ et } Df(x) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} = 0.$$



$$D^2f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u_1^2} & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

Or en un point quelconque de $W(x_0)$

$$\text{grad } f(x) = \text{grad}_{u_1} \tilde{f} + 2z \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2}.$$

$2z \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2}$ est la composante de $\text{grad } f$ dans N_0 .

Montrons que $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ est partout différent de 0, ce qui achèvera la démonstration car le noyau de $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}$ est contenu dans M_0 .

Posons $n = \sup (i_1, \dots, i_n)$.

Sur $W(x_0)$ $f(x) = \sum f_n(x)$ (certains des f_n peuvent être nuls éventuellement).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{ grad } f(x) = & (r'_{11} + r'_{21} r_{22} + r'_{31} r_{32} r_{33} + \dots + r'_{n1} \times \dots \times r_{nn})(x - a_1) \\ & + (r_{21} r'_{22} + \dots + r_{n1} r'_{n2} \times \dots \times r_{nn})(x - a_2) \\ & + r_{31} r_{32} r'_{33} + \dots + r_{n1} r_{n2} r'_{n3} r_{n4} \dots r_{nn} + \dots \\ & + (r_{n1} r_{n2} \dots r'_{nn})(x - a_n). \end{aligned}$$

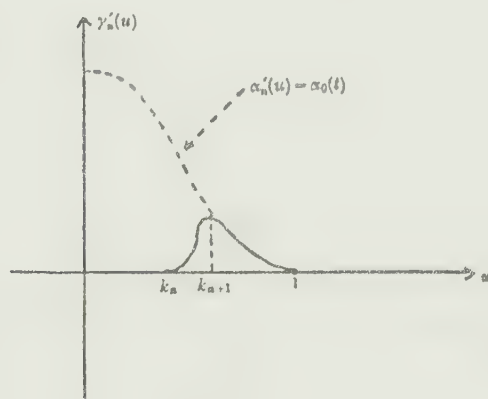


Fig. 5.

Posons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{ grad } f(x) = & \varphi_1(x) (x - a_1) + \dots + \varphi_n(x) (x - a_n) \\ = & [\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x)] z + \sum_{p=1}^n \varphi_p(x) (y - a_p) \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} = & \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x). \end{aligned}$$

On vérifie que $\varphi_p(x)$ est strictement négatif, quel que soit p tel que $f_p(x) \neq 0$. Faisons la vérification pour le 2^{lem} terme, par exemple.

En un point x quelconque :

$$\begin{aligned} r_{21} &> r_{31} > \dots > r_{n1} > 0 \\ -\frac{r'_{22}}{2} &= \frac{1}{3^2 \times c \times \varrho_2^2} \alpha_0 \left[\frac{|x - a_2|^2}{\varrho_2^2} \right] \quad 0 < \frac{r'_{n2}}{2} < \frac{1}{c \varrho_2^2} \alpha_0 \left[\frac{|x - a_2|^2}{\varrho_2^2} \right] \\ 0 < r'_{32} r_{33} + \dots + r'_{n2} \times \dots \times r_{nn} &< \frac{1}{c \varrho_2^2} \left[\frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} \right] \alpha_0 \left[\frac{|x - a_2|^2}{\varrho_2^2} \right] \\ f_2(x) &> 0. \text{ Donc } \alpha_0 \left[\frac{|x - a_2|^2}{\varrho_2^2} \right] > 0. \end{aligned}$$

Donc $r_{21} r'_{22} + \dots + r_{n1} r'_{n2} \dots r_{nn} < 0$.

Remarque. Si il existe une constante pour chaque p c_p telle que $f_p(x) > c_p$ il existe une constante c'_p $q_p(x) > c'_p$.

Lemme 3: La fonction $\frac{1}{f}$ vérifie la condition C de Palais-Smale pour la métrique Hilbertienne.

Soit $\Omega_n = [x; x \in \Omega \text{ et } f(x) > 3^{-n}]$.

Sous lemme: Ω_n est un ouvert qui ne rencontre que un nombre fini des ouverts V_p .

Comme en tout point x de Ω on a

$$f_p(x) < 3^{-p}.$$

On trouve en tout point x de Ω_n :

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq n} f_p(x) &= f(x) + \sum_{p > n} f_p(x) \\ &> f(x) - \sum_{p > n} 3^{-p} > 3^{-n} - \frac{1}{2} 3^{-n} \\ \sum_{p \leq n} f_p(x) &> \frac{3^{-n}}{2}. \end{aligned}$$

Soit W_p l'ensemble des éléments x de Ω_n tels que

$$\begin{aligned} f_p(x) &> \frac{3^{-n}}{2n} \\ \Omega_n &= \bigcup_{1 \leq p \leq n} W_p \end{aligned}$$

quand $|x - a_p|$ tend vers ϱ_p , $r_{pp}(|x - a_p|)$ tend vers 0 et $f_p(x)$ tend vers 0.

Done, quel que soit x élément de W_p , il existe une constante k_p telle que:

$$0 < k_p < \varrho_p - \sup_{x \in W_p} (|x - a_p|).$$

Soit m_p tel que: $\frac{\varrho_p}{m_p} < k_p$; quel que soit $m > m_p$ $W_p \cap V_m = \emptyset$.

Posons $N = \sup_{p \leq n} m_p$. Quel que soit $m > N$ on a $\Omega_n \cap V_m = \emptyset$.

Fin de la démonstration du lemme 3.

Considérons une suite de points (x_n) vérifiant les conditions:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad} \left(\frac{1}{f} \right) (x_n) = 0$
- (b) la suite $\left(\frac{1}{f(x_n)} \right)$ est bornée.

Il existe un indice n_0 tel que tous les points de la suite (x_n) appartiennent à Ω_{n_0} .

Soit N tel que, dans Ω_{n_0} $f(x) = \sum_{p \leq N} f_p(x)$.

Soit M^N le sous-espace affine de dimension finie engendré par les a_p ($1 \leq p \leq N$). x_n se projette en y_n sur M^N . Posons $z_n = x_n - y_n$

$$\text{grad } \frac{1}{f} = -\frac{1}{f^2} \text{grad } f.$$

Dans Ω_{n_0} $f(x)$ est borné supérieurement par n_0 .

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } f(x_n) = 0.$$

D'après la remarque faite au lemme 2 et d'après la minoration de $f_p(x_n)$ pour $p \leq n_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0.$$

On peut extraire de la suite bornée $\{y_n\}$ ($y_n \in M^N$) une suite $\{y_{n_p}\}$ qui converge vers un point y_0 , y_0 est un point de $\bar{\Omega}_{n_0} \cap M^N$

Donc

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n_p} = y_0$$

et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{grad } f(x_{n_p}) = \text{grad } f(y_0) = 0.$$

y_0 est un point critique.

Lemme 4: Il existe une approximation de la fonction f par une fonction g dont tous les points critiques sont non dégénérés et telle que la fonction $\psi = \frac{1}{g}$ vérifie la condition C de Palais-Smale par rapport à la métrique Hilbertienne ds_H^2 de H , non complète sur Ω .

Considérons les ouverts Ω_p définis précédemment.

Soit (Ω'_p) une famille d'ouverts telle que

$$\Omega_p \subset \bar{\Omega}_p \subset \Omega'_p \subset \bar{\Omega}'_p \subset \Omega_{p+1} \subset \dots$$

Sur Ω_p , $f(x) = \sum_{n \leq N_p} f_n(x)$.

Soit M_p le sous-espace affine de dimension $N_p - 1$ de H engendré par les points a_n ($n \leq N_p$).

Si x est un élément quelconque de H , nous noterons par y_p la projection de x sur M_p et nous poserons $z_p = x - y_p$.

Il existe une fonction $h_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

- 1) $\sum_{n \leq N_1} f_n(y_1, 0) + h_1(y_1)$ est une fonction de Morse sur $\Omega'_1 \cap M_1$
- 2) $h_1 = 0$ en dehors de $\Omega_2 \cap M_1$
- 3) $|h_1(y_1)| < \frac{1}{3^3}$.

Posons $g_1(x) = g_1(y_1, z_1) = f(y_1, z_1) + h_1(y_1)$.

D'après le calcul du lemme 2, g_1 est une fonction de Morse sur $\bar{\Omega}_1$ et sur Ω_1 $g_1(x) > \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3}$.

De même, il existe une fonction $h_2: M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- 1) $\sum_{n \leq N_1} f_n(y_2, 0) + h_1(y_1) + h_2(y_2)$ est une fonction de Morse sur $\Omega'_2 \cap M_2$
- 2) $h_2 = 0$ en dehors de $\Omega_3 \cap M_2$ $h_2 = 0$ sur $\Omega_1 \cap M_2$
- 3) $|h_2(y_2)| < \frac{1}{3^4}$.

(Il est possible de réaliser la condition 2, car sur $\bar{\Omega}_1 \cap M_2$ la fonction $\sum_{n \leq N_1} f_n(y_2, 0) + h_1(y_1)$ coïncide avec la fonction g_1 .)

Posons $g_2(x) = g_2(y_2, z_2) = \sum_{n \leq N_1} f_n(y_2, z_2) + h_1(y_1) + h_2(y_2)$.

g_2 coïncide avec g_1 sur Ω_1 , g_2 est une fonction de Morse sur $\bar{\Omega}_2$ et sur Ω_2 $\frac{1}{3^3} < g_2(x) < \frac{1}{3}$.

Nous définissons ainsi par récurrence une suite g_n

- g_n est une fonction de Morse sur Ω_n
- sur Ω_n $\frac{1}{3^{n-1}} < g_n(x) < \frac{1}{3^{n+1}}$
- g_n coïncide avec g_{n-1} sur Ω_{n-1} .

Posons $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, g est la fonction cherchée dans lemme 4.

Lemme 5: La métrique $ds^2 = ds_H^2 + d\psi^2$ sur Ω est complète.

La fonction non dégénérée ψ vérifie la condition C de Palais-Smale pour cette métrique.

Démonstration: L'application $i: x \rightarrow (x, \psi(x))$ de Ω dans $H' = H \times \mathbb{R}$ est un plongement fermé. En effet $\psi(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers le bord de Ω . Si la suite de terme général $i(x_j)$ tend vers $(u, v) \in H \times \mathbb{R}$, alors x_j tend vers $u \in H$, et u est dans Ω parce que $\lim \psi(x_j) = v$ est un nombre fini.

La métrique induite $ds^2 = ds_H^2 + d\psi^2$ est complète.

En un point x de Ω , ds^2 , ds_H^2 et $d\psi^2$ sont des formes quadratiques sur l'espace tangent T_x .

Le gradient, (Grad ψ) par rapport à ds^2 en x est donné par:

$$\begin{aligned} (\text{Grad } \psi)^2 &= \sup_{0 \neq \tau \in T_x} \left(\frac{d\psi^2}{ds^2} \right) (\tau) = \sup \frac{d\psi^2}{ds^2} \\ &= \sup \frac{1}{1 + \frac{ds_H^2}{d\psi^2}}. \end{aligned}$$

Si ce nombre est $< \frac{1}{2}$, alors $\inf \frac{ds_H^2}{d\psi^2} > 1$,

$$\inf \left(1 + \frac{ds_H^2}{d\psi^2} \right) < 2 \inf \frac{ds_H^2}{d\psi^2},$$

et on trouve

$$(\text{Grad } \psi)^2 > \frac{1}{2} \sup \frac{d\psi^2}{ds_H^2} = \frac{1}{2} (\text{grad } \psi)^2.$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{Grad } \psi(x_n)| = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } \psi(x_n) = 0$.

La fonction ψ vérifiant la condition C de Palais-Smale pour la métrique ds_H^2 , la vérifie aussi pour la métrique ds^2 .

Ce qui achève la démonstration du théorème A.

§ 3. H est diffeomorphe à $H - K$ pour K compact

Démonstration du Théorème B_1 :

L'espace de Hilbert H muni du produit scalaire (x, y) est plongé par l'application identique comme sous-espace linéaire non complet de H_0 muni du produit scalaire $(x, y)_0$ de la manière suivante.

$$H = \left[x = (x_1, x_2, \dots) \sum_{i=1}^n x_i^2 < \infty \right] \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

$$H_0 = \left[x = (x_1, x_2, \dots) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon x_i}{i 2^i} \right)^2 < \infty \right] \quad (x, y)_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{i 2^i} \right)^2 x_i y_i.$$

Soit d la distance sur H associée à la norme $|\cdot|$

Soit d_0 la distance sur H_0 associée à la norme $|\cdot|_0$.

Pour tout entier naturel p , considérons un recouvrement de K par n_p boules de H_0 $B\left(a_i^p, \frac{1}{2^p}\right)$ de centre a_i^p et de rayon $\frac{1}{2^p}$ ($1 \leq i \leq n_p$).

Posons

$$A^p = \bigcup_{i=1}^{n_p} a_i^p.$$

Nous introduisons la fonction de classe C^0

$$f^p(x) = d_0(x, A^p).$$

Pour les grandes distances $d_0(x, A^p)$ est une approximation de $d_0(x, K)$.

Les points a_i^p engendrent un sous-espace affine de H : M^p . Choisissons une origine dans M^p : a_0^p .

Soit H^p le sous-espace de H engendré par M^p et un vecteur orthogonal à M^p (du sens du produit scalaire de H).

La fonction f^p a les propriétés suivantes

Toute hypersurface d'équation $f^p(x) = K$ est de révolution autour de M^p .

Quels que soient les points x et y

$$|f^p(x) - f^p(y)| \leq |x - y|_0.$$

Approximation de la fonction f^p par une fonction g^p de classe C^∞ .

Nous définissons la fonction g^p dans H^p , symétrique par rapport à M^p à l'aide d'un produit de convolution. Par rotation autour de M^p , g^p est définie sur H .

Considérons la fonction β

$$\beta(x) = \begin{cases} \int_x^1 \exp(t^2 - 1)^{-1} dt / \int_0^1 \exp(t^2 - 1)^{-1} dt & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \text{ et } x < 0. \end{cases}$$

Posons $c = \int_{H^p} \beta(|x|_0) dx$.

Pour tout entier $k > 0$ considérons la convolution:

$$(1) \quad g_k^p(y) = \frac{k^{n_{p'}}}{c} \int_{H^p} f^p(y-x) \beta(k|x|_0) dx$$

$$(2) \quad = \frac{k^{n_{p'}}}{c} \int_{H^p} \beta(k|y-x|_0) f^p(x) dx$$

D'après les propriétés du produit de convolution:

- $g_k^p(y)$ est symétrique par rapport à M^p (car f^p l'est).
- $g_k^p(y)$ est de classe C^∞ (d'après (2)).
- Lorsque k tend vers l'infini, la suite de fonctions g_k^p converge uniformément vers f^p sur tout compact de H^p (d'après (1)).
- En tout point y $|\text{grad } g_k^p(y)|_0 \leq 1$, car quels que soient les points y et y'

$$\begin{aligned} |g_k^p(y) - g_k^p(y')| &\leq \frac{k^{n_{p'}}}{c} \int_{H^p} |f^p(y-x) - f^p(y'-x)| \beta(k|x|_0) dx \\ &\leq \frac{k^{n_{p'}}}{c} \int_{H^p} |y - y'|_0 \beta(k|x|_0) dx \\ &\leq |y - y'|_0. \end{aligned}$$

Construction de la fonction h (approximation, de classe C^∞ de la fonction distance au compact).

Soit λ une constante positive indépendante de p .

Nous supposons $\lambda > 10$.

Posons $A^p = \left\{ x; x \in H^p \text{ et } f^p(x) = \frac{\lambda}{2^p} \right\}$ et K^p un voisinage compact de A^p .

Pour un entier k_0 tel que $\sup_{x \in K_p} |f^p(x) - g_{k_0}^p(x)| < \frac{\lambda}{2^{p+4}}$ posons $g^p = g_{k_0}^p$.

Soit de plus

$$L^p = \left\{ x; x \in H \text{ et } g^p(x) = \frac{\lambda}{2^p} \right\}$$

$$F^{p+1} = \left\{ x; x \in H \text{ et } g^{p+1}(x) < \frac{\lambda}{2^{p+1}} \right\}$$

$$G^{p+1} = \left\{ x; x \in H \text{ et } g^{p+1}(x) < \frac{2\lambda+1}{2^{p+2}} \right\}.$$

La condition $\lambda > 10$ entraîne $L^p \cap G^{p+1} = \emptyset$.

Définissons une fonction h^{p+1} qui coïncide avec g^{p+1} sur F^{p+1} et avec g^p en dehors de G^{p+1} , et dont le gradient est majoré par une constante indépendante de p .

Posons:

$$\psi_{p+1}(x) = \beta(2^{p+2}[g^{p+1}(x) - \lambda 2^{-p-1}]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F^{p+1} \\ 0 & \text{si } x \notin G^{p+1} \end{cases}$$

$$\bar{\psi}_{p+1}(x) = 1 - \psi_{p+1}(x)$$

$$h^{p+1} = \psi_{p+1} \times g^p + \bar{\psi}_{p+1} \times g^{p+1}$$

La dérivée de $\beta(t)$ étant en valeur absolue majorée sur $[0,1]$ on vérifie que $|\text{grad } h^{p+1}|$ est majoré par une constante indépendante de p .

Soit x un élément quelconque de $H - K$. Il existe un entier p_0 tel que:

$$\frac{\lambda}{2^{p_0}} < g^{p_0}(x) < \frac{\lambda}{2^{p_0}} + \frac{\lambda}{2^{p_0+1}}$$

Posons

$$h(x) = h^{p_0}(x).$$

Propriétés de la fonction h

- La fonction h est de classe c^∞ sur $H - K$.
- Si $d_0(x, K)$ tend vers 0 $h(x)$ tend vers 0.
(Nous poserons $h(x) = 0$ sur K .)
- $|\text{grad } h|_0$ est majoré uniformément par une constante.

Construction du difféomorphisme cherché

Considérons dans H_0 la courbe d'équation

$$p_1(t) = (t, t^2, \dots) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Posons

$$p = p_1 \circ \beta$$

Considérons l'application φ définie dans H_0 par:

$$\varphi(y) = y + p(h(y)).$$

φ est une application différentiable.

$$\varphi(H-K) \subset H \text{ et } \varphi(K) \subset H_0 - H.$$

D'autre part, si ε a été choisi assez petit, en tout point y de $H-K$

$$|p' \times h'(y)|_0 < \frac{1}{2},$$

on en déduit que en tout point de $H-K$, $\varphi'(y)$ est un opérateur inversible. Donc φ admet localement un inverse.

Quels que soient les points y_1 et y_2 non tous deux situés dans K

$$|p(h(y_1)) - p(h(y_2))|_0 < \frac{|y_1 - y_2|_0}{2}.$$

Donc l'équation $\varphi(y) = z$ admet une solution unique dans H si z est un élément quelconque de H . (Cette solution est le point fixe de l'application :

$$y \rightarrow z - p(h(y)).$$

φ est donc un difféomorphisme de $H-K$ sur H .

Remarque. φ est l'identité pour les points y tels que $h(y) \geq 1$.

On peut, de la même manière obtenir pour tout $\varepsilon' > 0$ un difféomorphisme φ tel que $\varphi(y) - y = 0$ pour $d_0(y, K) > \varepsilon'$.

§ 4. V est difféomorphe à $V-K$, pour K compact et V un voisinage de K dans H .

Si, au lieu de considérer V , nous considérons V_0 , H_0 -voisinage de K dans $H \cap H_0$, la proposition résulte de la Remarque du § 3. En modifiant un peu la définition de H_0 , nous allons nous ramener à ce cas.

λ étant la constante choisie précédemment, il existe un entier q tel que :

$$\frac{\lambda}{2^{q-1}} < d(H-V, K).$$

Comme pour la démonstration du théorème B_1 , définissons, pour la distance d associée à la norme de H , les points a_i^q , les fonctions f^q, g^q , le sous espace affine M^q . Nous supposons l'origine située dans M^q . Soit H' le supplémentaire orthogonal de M^q dans H . $H = M^q \oplus H'$. H' se plonge par l'identité dans H'_0 construit comme précédemment.

Posons $H_0 = M^q \oplus H'_0$.

Soit x un élément de H_0 , x_1 la projection de x sur M^q , et x_2 la projection de x sur H'_0 .

H_0 est muni du produit scalaire $(x, y)_0 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)_0$.

Pour tout élément x de H : $|x| \geq |x|_0$.

Nous pouvons définir, comme dans § 3, pour la distance d_0 , associée à la norme de H_0 , pour tout entier p , les fonctions f_p^0 et g_p^0 .

Les H_0 -boules de $H \cap H_0$, $B_0\left(a\lambda, \frac{1}{2q}\right)$ de centre $a\lambda$ et de rayon $2\frac{1}{2q}$ (pour la distance d_0 associée à la norme de H_0) recouvrent K . Les fonctions f_0^q et g_0^q sont définies à partir de ce recouvrement.

Lemme: Il existe un difféomorphisme χ de H sur H possédant les propriétés suivantes:

- a) χ est un difféomorphisme de classe C^∞ ,
- b) χ coïncide avec l'identité de H sur un voisinage de K ,
- c) Il existe un H_0 -voisinage de V_0 de K dans $H = H \cap H_0$ et un H -voisinage V' de K dans H , tel que l'image par χ de V' recouvre V_0 .

Démonstration:

$\chi(x) = \chi(x_1, x_2) = (\chi_1(x), \chi_2(x)) = (\chi, \eta_{x_1}(x_2)) \in M^q \oplus H'$
est déduit par ses deux composantes, dont la deuxième est un difféomorphisme radial:

$$\eta_{x_1}(x_2) = \chi_2(x_1, x_2) = \left\{ \beta_1(g^q(x) \cdot 2^{q+3}/q\lambda) \cdot \left(1 - \frac{|x_2|}{|x_2|_0}\right) + \frac{|x_2|}{|x_2|_0} \right\} x_2,$$

$$\beta_1(t) = \beta(2t - \frac{1}{2}).$$

On verra que $\varepsilon: x_1 \rightarrow \varepsilon(x_1)$ existe, tel que:

$$\eta_{x_1}(x_2) = \begin{cases} x_2 & \text{si } |x_2|_0 < \varepsilon(x_1) \\ \frac{|x_2|}{|x_2|_0} x_2 & \text{si } |x_2|_0 \geq 3\varepsilon(x_1). \end{cases}$$

Si on pose $B(\varepsilon(x_1)) = \{x_2 \in H': |x_2|_0 < 3\varepsilon(x_1)\}$,

$$B_0(\varepsilon(x_1)) = \{x_2 \in H': |x_2|_0 < 3\varepsilon(x_1)\},$$

l'image par η_{x_1} de $B(\varepsilon(x_1))$ recouvre $B_0(\varepsilon(x_1))$.

Il faut observer que sur toute droite radiale (x_1, tv) à paramètre $t > 0$, η_{x_1} est un difféomorphisme de classe C^∞ sur elle-même parce que $g^q(x_1, tv)$ est une fonction strictement croissante de t .

La propriété a) est donc démontrée.

La propriété b) résulte immédiatement de la définition de β_1 .

c) On vérifie que l'on peut prendre pour V_0 et V' les ensembles ainsi définis

$$V' = \left\{ x; x \in H \text{ et } g^q(x) < \frac{\lambda}{2q} + \frac{\lambda}{2q+3} \right\} \subset V$$

$$V_0 = \left\{ x; x \in H \text{ et } g_0^q(x) < \frac{\lambda}{2q} \right\}.$$

Construction du difféomorphisme cherché.

Il existe un difféomorphisme φ_0 de $H - K$ sur H , qui est l'identité en dehors de V_0 .

φ_0 est construit comme dans le § 3 en considérant la courbe d'équation $x_2 = p(t)$ située dans $0 \times H'_0$ et on verra la remarque à la fin du § 3.

Posons

$$\varphi_2 = \chi^{-1} \varphi_0 \chi.$$

φ_2 est l'identité en dehors de V' , donc, à fortiori en dehors de V .

§ 5. H est difféomorphe à $H - L$, L sous-ensemble localement compact fermé de H

Démonstration du théorème B_3

L est réunion d'une suite croissante de compacts K_n

$$L = \bigcup_{n \in N} K_n.$$

H est plongé dans H_0 défini comme dans la démonstration du théorème B_1 .

Pour chacun des compacts K_n , nous pouvons considérer une fonction h_n définie sur H_0 et s'annulant sur K_n .

Définissons sur H_0 l'application:

$$\varphi(y) = y + \sum_{n \in N} 2^{-n} p(h_n(y)).$$

φ est une application différentiable de $H_0 - L$ dans H_0 . (Au voisinage d'un point y de $H_0 - L$, les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m des fonctions p et h_n sont uniformément bornées. Donc la série de terme général $u_n = 2^{-3} J^3 F(p(h_n(y)))$ est normalement convergente.)

$$\varphi(H - L) \subset H \text{ et } \varphi(L) \subset H_0 - H.$$

D'autre part, si ε a été choisi assez petit, quel que soit n

$$|p' \times h'_n(y)|_0 < \frac{1}{4}.$$

Donc

$$|\sum_{n \in N} 2^{-n} p' \times h'_n(y)|_0 < \frac{1}{2}.$$

Le raisonnement de la proposition 1 s'applique et φ est le difféomorphisme cherché.

§ 6. V est difféomorphe à $V - L$ pour L sous-ensemble localement compact fermé de H , V voisinage de L .

Démonstration du théorème B_4

Rappelons le théorème suivant dû à J. EELLS et N. H. KUIPERS [4].

Soit X un A.N.R. (absolute neighbourhood retract), A un sous-ensemble fermé de X . Si tout point de A admet un système fondamental de voisinages U dans X pour lesquels $U \cap A$ est homotopiquement négligeable dans U , alors A est homotopiquement négligeable dans X .

D'après la proposition 1, L est donc homotopiquement négligeable dans V . V et $V-L$ sont deux ouverts de H , donc, d'après la partie A sur chacun d'eux il existe une m -fonction.

V et $V-L$ sont deux variétés sur H homotopes, chacune est munie d'une m -fonction, elles sont donc difféomorphes d'après [7].

Corollaire: Soit M une variété Hilbertienne paracompacte de classe C^∞ telle que il existe sur M une m -fonction.

Soit L un sous-ensemble localement compact de M , $M-L$ est difféomorphe à M .

Démonstration: Considérons un plongement i de M dans H [1]. $i(M)$ admet dans H un voisinage tubulaire T difféomorphe à $M \times H$ [6]. Or d'après [7], M est difféomorphe à $M \times H$. T est un ouvert de H , M est donc difféomorphe à un ouvert de H .

Il suffit d'appliquer à cet ouvert le théorème B_4 .

Remarque. 1) K étant un sous-ensemble compact de H , il existe une isotopie de H supprimant K , à support dans un voisinage arbitraire de K .

2) L étant un sous-ensemble localement compact de H , il existe une isotopie de H supprimant L .

La démonstration est une généralisation immédiate de la démonstration de [7].

Note. Par des méthodes différentes, Peter Renz (élève de H. Corson) a démontré:

- K étant un sous-ensemble compact de H , $H-K$ est difféomorphe à H .
- K_1 et K_2 étant deux sous-ensembles compacts de H , tout homéomorphisme de K_1 dans K_2 peut se prolonger en un homéomorphisme de H qui induit un difféomorphisme de classe C^∞ de $(H-K_1)$ sur $(H-K_2)$.

*Université d'Amsterdam
et Centre National de la
Recherche Scientifique (France).*

BIBLIOGRAPHIE

1. ABRAHAM, R., Lectures of Smale on Differential Topology, Notes at Columbia University (Mimeographed) — New York, 1962-1963.
2. BESSAGA, C., Every infinite dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere, Bull. Acad. Pol. Sci. XIV, 1, 27-31 (1966).
3. EELLS, J., A setting for global analysis, Bull. A.M.S. 72, 751-807 (1966).
4. ——— and N. H. KUIPER, Homotopy-negligible subsets.
5. ——— and MAC ALPIN, On an approximate Morse-Sard theorem.
6. KUIPER, N. H., The homotopy type of the unitary group of a Hilbert space, Topology 3, 19-30 (1965).
7. ——— and D. BURGHELEA, Hilbert manifolds.

